

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VII, N. 6

Serie nona

20 Novembre 1950

Un principio variazionale per problemi dipendenti dal tempo.

M. CINI

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

L. A. RADICATI

Istituto di Fisica del Politecnico - Torino

(ricevuto il 29 Agosto 1950)

Riassunto. — Il metodo variazionale elaborato da SCHWINGER per la trattazione dei problemi d'urto, viene esteso al caso di un sistema sottoposto all'azione di un potenziale dipendente dal tempo. Si dimostra che l'ampiezza di probabilità di transizione dallo stato iniziale ad uno stato finale qualsiasi gode di una proprietà di stazionarietà. Si fa vedere come il caso indipendente dal tempo discende dal caso generale qui esaminato.

1. — Introduzione.

Recentemente l'uso dei metodi variazionali è stato esteso ai più svariati campi della fisica, particolarmente da SCHWINGER e dalla sua scuola ⁽¹⁾ ⁽²⁾.

Ci proponiamo di far vedere come si possa stabilire, usando il formalismo di FEYNMANN ⁽³⁾, un principio variazionale che consente di studiare da un punto di vista generale l'evoluzione di un sistema, che trovandosi inizialmente in uno stato determinato $f(\mathbf{x}, t)$, viene sottoposto all'azione di un potenziale funzione qualsiasi dello spazio e del tempo, il quale trasforma lo stato iniziale in uno stato, che indicheremo con $\psi(\mathbf{x}, t)$. Si può allora vedere che la

(1) J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **72**, 742 (1947); W. KOHN: *Phys. Rev.*, **74**, 1763 (1948); J. M. BLATT e J. D. JACKSON: *Phys. Rev.*, **76**, 18 (1949).

(2) G. TORALDO DI FRANCA: *Nuovo Cimento*, **7**, 255 (1950), dove si trovano altre indicazioni bibliografiche.

(3) R. P. FEYNMANN: *Phys. Rev.*, **76**, 749 (1949).

proiezione dello stato evoluto ψ su uno stato qualsiasi $g(\mathbf{x}, t)$ (che rappresenta l'ampiezza di probabilità di transizione dallo stato iniziale f allo stato finale g) è stazionaria rispetto a variazioni arbitrarie piccole della funzione ψ che rappresenta lo stato evoluto.

Da un altro punto di vista, SCHWINGER ha trattato lo stesso tipo di problema introducendo nel quadro della sua elettrodinamica covariante, un « reaction operator » che gode della stessa proprietà di stazionarietà ⁽⁴⁾. Verranno discusse altrove le relazioni fra il principio variazionale di SCHWINGER e quello che viene qui stabilito.

Si vedrà inoltre che la determinazione degli sfasamenti asintotici nei problemi d'urto, costituisce un caso particolare dell'applicazione di questa proprietà più generale.

Poichè il principio variazionale si basa essenzialmente sulla trasformazione dell'equazione differenziale del problema in un'equazione integrale, nella quale figura la funzione di Green, il quadro più adatto per studiare questa estensione è il formalismo integrale di Feynman ⁽⁵⁾.

2. - Caso generale.

Per semplicità ci limiteremo a studiare il moto di un elettrone in un campo di potenziale assegnato. L'estensione al caso in cui il sistema è costituito da più elettroni, e l'inclusione del campo di radiazione connesso a tali elettroni, può farsi con il metodo discusso da DYSON ⁽⁶⁾.

Se $f(\mathbf{x}_1, t_1) = f(1)$ è la funzione d'onda che rappresenta lo stato dell'elettrone al tempo t_1 , lo stato dell'elettrone al tempo t_2 è rappresentato da

$$(1) \quad \psi(2) = \int K^{(A)}(2,1) \beta f(1) d^3\mathbf{x}_1,$$

dove $K^{(A)}(2,1)$ è la funzione di Green dell'equazione di Dirac

$$(i \nabla - \mathbf{A} - m)\psi = 0,$$

che soddisfa all'equazione integrale ⁽⁷⁾

$$(2) \quad K^{(A)}(2,1) = K^+(2,1) - i \int K^+(2,3) \mathbf{A}(3) K^{(A)}(3,1) d\tau_3,$$

⁽⁴⁾ J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **74**, 1439 (1948).

⁽⁵⁾ Mentre il presente lavoro era in corso di stampa è apparso un lavoro di B. A. LIPPMANN e J. SCHWINGER (*Phys. Rev.*, **79**, 469 (1950)) nel quale fra l'altro, con metodo diverso è ottenuto il principio variazionale per l'ampiezza di probabilità di transizione.

⁽⁶⁾ F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949).

⁽⁷⁾ Cfr. R. P. FEYNMAN: loc. cit., formula (16).

con $\nabla = \gamma_\mu (\partial/\partial x_\mu)$; $\mathbf{A} = A_\mu \gamma_\mu$ è il potenziale assegnato; le matrici γ e la metrica usata sono quelle di Feynman; $d\tau = d^3\mathbf{x} dt$; $K^{+(2,1)}$ è la funzione di Green dell'equazione di Dirac in assenza di campo nella teoria del positrone.

Pertanto l'ampiezza di probabilità di trovare l'elettrone al tempo t_2 nello stato $g(\mathbf{x}_2)$ dopo che il potenziale ha terminato di agire è data da ⁽⁸⁾

$$(3) \quad a = \int \bar{g}(2) \beta K^{(A)}(2,1) \beta f(1) d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 \quad (\bar{g} = g^* \beta).$$

Risolvendo la (2) per approssimazioni successive e tenendo conto che

$$\begin{aligned} f(2) &= \int K^{+(2,1)} \beta f(1) d^3\mathbf{x}_1, \\ \bar{g}(2) &= \int \bar{g}(1) \beta K^{+(1,2)} d^3\mathbf{x}_1, \end{aligned}$$

si ottiene per la (3)

$$\begin{aligned} a &= \int \bar{g}(2) \beta f(2) d^3\mathbf{x}_2 - i \int \bar{g}(2) \mathbf{A}(2) \{ f(2) - i \int K^{+(2,3)} \mathbf{A}(3) f(3) d\tau_3 + \dots \} d\tau_2 = \\ &= \int \bar{g}(2) \beta f(2) d^3\mathbf{x}_2 - i \int \{ \bar{g}(2) - i \int \bar{g}(3) \mathbf{A}(3) K^{+(3,2)} d\tau_3 + \dots \} \mathbf{A}(2) f(2) d\tau_2. \end{aligned}$$

Se g ed f sono stati ortogonali, i primi termini dei due membri sono nulli. Il termine tra parentesi nell'integrale a primo membro, è la soluzione, in approssimazioni successive, dell'equazione integrale

$$(4) \quad \psi(2) = f(2) - i \int K^{+(2,1)} \mathbf{A}(1) \psi(1) d\tau_1,$$

mentre il termine tra parentesi nel secondo membro è la soluzione di

$$(5) \quad \bar{\chi}(2) = \bar{g}(2) - i \int \bar{\chi}(1) \mathbf{A}(1) K^{+(1,2)} d\tau_1.$$

La $\psi(2)$ rappresenta manifestamente lo stato al tempo t_2 che si è evoluto a partire dallo stato $f(1)$ al tempo t_1 per effetto del potenziale (come si vede facilmente introducendo la (2) nella (1). Analogamente $\bar{\chi}(2)$ rappresenta lo stato che si otterrebbe al tempo t_2 se al tempo t_1 il sistema si fosse trovato nello stato $\bar{g}(1)$.

L'ampiezza di probabilità a è data da

$$(6) \quad a = -i \int \bar{g}(2) \bar{\mathbf{A}}(2) \psi(2) d\tau_2 = -i \int \bar{\chi}(2) \mathbf{A}(2) f(2) d\tau_2.$$

È facile ora dimostrare che a è stazionario rispetto a piccole variazioni arbitrarie di $\psi(2)$ e di $\bar{\chi}(2)$. Infatti, moltiplicando a sinistra la (4) per $\bar{\chi}(2) \mathbf{A}(2)$

⁽⁸⁾ Cfr. R. P. FEYNMAN: loc. cit., formula (20).

(o la (5) a destra per $\mathbf{A}(2)\psi(2)$) ed integrando rispetto a $d\tau_2$, si ottiene, tenendo conto della (6)

$$(7) \quad \frac{1}{a} = \frac{\int \bar{\chi}(2)\mathbf{A}(2)\psi(2) d\tau_2 + i \int \bar{\chi}(3)\mathbf{A}(3)K^{+(3,2)}\mathbf{A}(2)\psi(2) d\tau_2 d\tau_3}{\int \bar{\chi}(2)\mathbf{A}(2)f(2) d\tau_2 \times \int \bar{g}(2)\mathbf{A}(2)\psi(2) d\tau_2}$$

Se ora si calcola la variazione del primo ordine di $1/a$ per effetto delle equazioni (4) e (5), si vede che tale variazione è nulla.

3. - Passaggio al caso stazionario.

Quando il potenziale \mathbf{A} è indipendente dal tempo, la ψ e la $\bar{\chi}$ delle equazioni (4) e (5) sono separabili; in una parte dipendente dallo spazio ed in una dipendente dal tempo.

$$(8) \quad \begin{cases} \psi(2) = \psi(\mathbf{x}_2) \exp[-iE_f t_2] & f(2) = f(\mathbf{x}_2) \exp[-iE_f t_2] \\ \bar{\chi}(2) = \bar{\chi}(\mathbf{x}_2) \exp[+iE_g t_2] & \bar{g}(2) = \bar{g}(\mathbf{x}_2) \exp[+iE_g t_2] \end{cases}$$

Ricordiamo che $K^{+(2,1)}$ vale

$$(9) \quad K^{+(2,1)} = \begin{cases} \sum_n \Phi_n(\mathbf{x}_2) \bar{\Phi}_n(\mathbf{x}_1) \exp[-iE_n(t_2 - t_1)] & t_2 > t_1 \\ - \sum_n \Phi_n(\mathbf{x}_2) \bar{\Phi}_n(\mathbf{x}_1) \exp[-iE_n(t_2 - t_1)] & t_2 < t_1 \end{cases}$$

dove la prima somma va estesa agli stati ad energia positiva e la seconda a quelli ad energia negativa, in accordo con la teoria del positrone di Feynman. Le Φ_n sono le autofunzioni (parte spaziale) dell'equazione di Dirac per l'elettrone libero; la Φ corrispondente all'energia E , è già stata indicata con $f(x)$ e quella con energia E_g con $g(x)$.

Introducendo le (8) e (9) nella (4), eseguendo l'integrazione rispetto a t da $-\infty$ a $+\infty$ e dividendo i due membri per $\exp[-iE_f t_2]$ si ottiene

$$(10) \quad \psi(\mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_2) - \int \sum_n \frac{\Phi_n(\mathbf{x}_2) \bar{\Phi}_n(\mathbf{x}_1)}{E_n - E_f} \mathbf{A}(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_1) d^3\mathbf{x}_1 - \\ - \int \sum_n \frac{\Phi_n(\mathbf{x}_2) \bar{\Phi}_n(\mathbf{x}_1)}{E_n - E_f} \mathbf{A}(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_1) d^3\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{x}_2) - \int G_f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \mathbf{A}(\mathbf{x}_1) \psi(\mathbf{x}_1) d^3\mathbf{x}_1,$$

dove si è tenuto conto che il contributo nei limiti $+\infty$ e $-\infty$ è nullo, d'ac-

cordo con la convenzione introdotta da DIRAC ⁽⁹⁾, che fisicamente esprime la condizione per la stazionarietà del sistema, e si è posto

$$(11) \quad G_f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = \sum_n \frac{\Phi_n(\mathbf{x}_2) \overline{\Phi}_n(\mathbf{x}_1)}{E_n - E_f},$$

che è la funzione di Green per l'equazione di Dirac dell'elettrone libero nel caso stazionario. La \sum_n che figura nella (11) va estesa agli stati ad energia negativa e positiva.

Volendo studiare le relazioni tra la a definita dalla (6) e gli sfasamenti asintotici, è sufficiente limitarsi al caso dell'equazione di Schrödinger. In questo caso $G_f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$ vale

$$(12) \quad G_f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp[+ik|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|]}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|},$$

dove $k^2 = 2mE_f$ (m è la massa dell'elettrone), e la ampiezza di probabilità

$$(13) \quad a = -i \int g^*(\mathbf{x}) A(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d^3x.$$

L'integrale rispetto a t_2 che figura nella (6) è diverso da zero, e dà luogo ad un fattore uno, solo se l'energia è conservata, cioè $E_f = E_g$.

Se il potenziale ha un raggio d'azione finito, o comunque decresce più rapidamente di $1/|\mathbf{x}|$ la $\psi(\mathbf{x})$ ha la forma asintotica

$$\psi(\mathbf{x}) = \exp[i\mathbf{k}\mathbf{x}] + a(\theta, \varphi) \frac{\exp[i|\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{x}|]}{|\mathbf{x}|},$$

dove θ e φ sono gli angoli polari di \mathbf{x} rispetto a \mathbf{k} ; $|a(\theta, \varphi)|^2$ rappresenta la sezione d'urto nella direzione individuata da θ e φ , e dipende dagli sfasamenti asintotici nella maniera ben nota.

La a definita dalla (13) coincide con la $a(\theta, \varphi)$. L'argomento è stato trattato diffusamente: rimandiamo, per esempio, alla formula (3.13) del lavoro di KOHN ⁽¹⁾.

La proprietà di stazionarietà per $a(\theta, \varphi)$ nei problemi d'urto, che equivale, quando ci si limita alle sole onde S , alla stazionarietà dello sfasamento asintotico ⁽¹⁰⁾, è stata dedotta da diversi autori ⁽¹⁾ ⁽²⁾ da equazioni equivalenti alle (10), (11), (12); come abbiamo visto essa è una conseguenza immediata della proprietà più generale che abbiamo dimostrato.

⁽⁹⁾ P. A. M. DIRAC: *The principles of quantum mechanics*, 3ª ed. (Oxford, 1947), pag. 95.

⁽¹⁰⁾ Cfr. J. M. BLATT e J. D. JACKSON: loc. cit., formula (2.11).

Nel caso stazionario il metodo variazionale ha consentito di ottenere risultati notevoli nei casi in cui la teoria delle perturbazioni non si rivelava adatta. In modo analogo è possibile che l'estensione qui proposta sia suscettibile di qualche applicazione nel caso in cui la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo non dia risultati soddisfacenti.

Ringraziamo il prof. G. WATAGHIN per le discussioni avute sull'argomento.

SUMMARY

The variational method developed by SCHWINGER for the treatment of scattering problems has been extended to include the case of a time-dependent potential. The transition amplitude from an initial to an arbitrary final state is shown to be stationary. The time-independent case follows easily from this more general principle.

**Su alcune relazioni tra principi variazionali
nel quadro delle formulazioni di Feynman e di Schwinger
dell'elettrodinamica.**

M. CINI

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

(ricevuto il 9 Settembre 1950)

Riassunto. — Vengono studiate le relazioni tra il principio variazionale stabilito, usando il formalismo integrale di Feynman, per l'ampiezza di probabilità di transizione di un sistema sottoposto all'azione di un potenziale qualsiasi da uno stato ad un altro, ed il principio variazionale dimostrato da SCHWINGER per il « reaction operator K » definito nel quadro della sua formulazione covariante dell'elettrodinamica. Si ritrovano, fra l'altro, i risultati di DYSON sull'interpretazione del metodo di Feynman come matrice S , e sulle semplificazioni che si possono introdurre nel formalismo di Schwinger per passare a quello di Feynman. Si dimostra come, quando il potenziale sia indipendente dal tempo, si ottenga in tutti e due i casi il principio variazionale per la « scattering amplitude » dedotto da SCHWINGER ed estesamente usato per la determinazione degli sfasamenti asintotici nei problemi d'urto.

1. — È stato stabilito recentemente, utilizzando il formalismo integrale introdotto da FEYNMAN in elettrodinamica ⁽¹⁾, un principio variazionale per la probabilità di transizione da uno stato ad un altro, di un sistema sotto-

⁽¹⁾ R. P. FEYNMAN: *Phys. Rev.*, **76**, 749, 769 (1949); nel seguito indicati con FI ed FII.

posto all'azione di un potenziale funzione qualsiasi dello spazio e del tempo ⁽²⁾. Un analogo principio è stato dimostrato da SCHWINGER per il «reaction operator K », definito nel quadro della sua elettrodinamica quantistica covariante ⁽³⁾ ⁽⁴⁾.

Può essere interessante di per sé studiare la relazione intercorrente tra queste due grandezze, e le ragioni che spiegano la comune proprietà di stazionarietà. Per di più, sebbene le relazioni che sussistono tra la formulazione di SCHWINGER e quella di FEYNMAN dell'elettrodinamica siano state chiarite completamente da DYSON nella loro essenza ⁽⁵⁾, il confronto dei due principi variazionali può condurre all'esame dettagliato di alcuni punti che la trattazione generale di DYSON necessariamente non illustra.

Anche nella presente trattazione, come nel lavoro citato ⁽²⁾, ci limiteremo a studiare il caso di un elettrone in un campo assegnato: l'estensione al caso generale in cui si tenga conto dell'interazione con il campo elettromagnetico ed eventualmente più elettroni siano presenti non presenta difficoltà, al lume dei risultati di DYSON, e non altera la sostanza di quanto esporremo; verrà d'altronde indicata la via da seguire per tale generalizzazione.

Per tutte le definizioni di grandezze e simboli siamo costretti a rimandare ai lavori citati.

2. - Secondo FEYNMAN l'ampiezza di probabilità di transizione da uno stato $f(r)$ all'istante t_1 ⁽⁶⁾, ad uno stato $g(r)$ all'istante t_2 per un elettrone sottoposto nell'intervallo di tempo tra t_1 e t_2 all'azione di un potenziale $A(r, t)$ ⁽⁷⁾ è, in approssimazioni successive ⁽⁸⁾

$$(1) \quad a = -i \int \bar{g}(1) A(1) f(1) d\tau_1 + \\ + (-i)^2 \int \bar{g}(2) A(2) K_+(2, 1) A(1) f(1) d\tau_1 d\tau_2 + \dots$$

⁽²⁾ M. CINI e L. A. RADICATI: *Nuovo Cimento* **7**, 905 (1950); *Phys. Rev.*, **80** (in pubblicazione).

⁽³⁾ J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **74**, 1439 (1948); **75**, 651 (1949); **76**, 790 (1949); in seguito indicati con SI, SII, SIII.

⁽⁴⁾ Mentre il presente lavoro era in corso di stampa è apparso un lavoro di B. A. LIPPMANN e J. SCHWINGER (*Phys. Rev.*, **79**, 469 (1950)) nel quale con metodo diverso, sono ottenuti alcuni dei risultati qui esposti.

⁽⁵⁾ F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949): nel seguito indicati con DI, DII.

⁽⁶⁾ A differenza delle notazioni di FEYNMAN, indichiamo le coordinate nello spazio tridimensionale ordinario con il vettore r , perchè, quando introdurremo le notazioni di SCHWINGER, indicheremo con x' il punto quadridimensionale (r_1, t_1) che FEYNMAN indica con il simbolo (1), e con x'' ... i punti (2)... Inoltre $x_0 = t = x_4/i$, mentre $x_1 x_2 x_3$ sono le componenti del vettore r .

⁽⁷⁾ $A(r, t)$ è il tetravettore-matrice definito in FI, eq. (11).

⁽⁸⁾ FI eq. (22), (23) e relative definizioni di $f(1)$, $\bar{g}(2)$.

Conviene trasformare questa espressione introducendo le notazioni impiegate da SCHWINGER ⁽⁹⁾. Per far questo occorre precisare che, mentre FEYNMAN non introduce esplicitamente la seconda quantizzazione del campo degli elettroni-positroni, per SCHWINGER la ψ descrivente questo campo è un operatore che agisce sulla funzione d'onda Ψ , funzione dei numeri d'occupazione e del tempo. La a sopra definita deve intendersi perciò ⁽¹⁰⁾ come l'elemento di matrice dell'operatore ottenuto dalla (1) sostituendo $\bar{g}(1)$ con $\bar{\psi}(x')$ ed $f(1)$ con $\psi(x')$, tra lo stato iniziale Ψ_1 in cui è presente un elettrone nello stato $f(1)$ e lo stato finale Ψ_2 in cui è presente un elettrone nello stato $g(2)$.

Tenendo inoltre presente che ⁽¹¹⁾

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -ie\gamma_\mu A_\mu(x),$$

e che ⁽¹²⁾

$$K_+(2, 1) = iS(x'' - x') - \frac{1}{2} S^{(1)}(x'' - x'),$$

si ottiene per a , considerato come operatore funzione di ψ ,

$$\begin{aligned} (3) \quad a = & -e \int \bar{\psi}(x) \gamma_\mu A_\mu(x) \bar{\psi}(x) dx + \\ & + ie^2 \int \bar{\psi}(x) A_\mu(x) \gamma_\mu \bar{S}(x - x') A_\nu(x') \gamma_\nu \psi(x') dx dx' - \\ & - \frac{e^2}{2} \int \bar{\psi}(x) A_\mu(x) \gamma_\mu S^{(1)}(x - x') \gamma_\nu A_\nu(x') \psi(x') dx dx' + \dots \end{aligned}$$

Se il potenziale è assegnato, $A_\mu(x)$ ed $A_\nu(x')$ sono conumeri e si può facilmente vedere che, tenendo conto dell'espressione ⁽¹³⁾

$$[j_\mu(x), j_\nu(x')] = ie^2 \left\{ \bar{\psi}(x) \gamma_\mu S(x - x') \gamma_\nu \psi(x') - \bar{\psi}(x') \gamma_\nu S(x' - x) \gamma_\mu \psi(x) \right\},$$

si ha

$$\begin{aligned} (4) \quad ie^2 \int \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \bar{S}(x - x') \gamma_\nu \psi(x) A_\mu(x) A_\nu(x') dx dx' = \\ = -\frac{1}{4} \int \varepsilon(x - x') [j_\mu(x), j_\nu(x')] A_\mu(x) A_\nu(x') dx dx'. \end{aligned}$$

⁽⁹⁾ Manteniamo solo, per semplicità, $\hbar = c = 1$.

⁽¹⁰⁾ V. anche FI, Appendice.

⁽¹¹⁾ Le matrici γ_μ sono le solite: $\gamma_4 = \beta$; $\gamma_r = -i\beta\alpha_r$ ($r = 1, 2, 3$).

⁽¹²⁾ Basta confrontare FI, eq. (31) con SIII, eq. (1.69) oppure FI, (eq. 34) con SII (A.21), (A.37).

⁽¹³⁾ SI eq. (2.14), (2.33).

In modo analogo, tenendo conto della relazione ⁽¹⁴⁾

$$\begin{aligned} \{j_\mu(x), j_\nu(x')\} &= \frac{e^2}{2} \{ [\bar{\Psi}_\beta(x), \psi_\alpha(x')] (\gamma_\mu S^{(1)}(x-x') \gamma_\nu)_{\beta\alpha} + \\ &+ [\bar{\Psi}_\beta(x'), \psi_\alpha(x)] (\gamma_\nu S^{(1)}(x'-x) \gamma_\mu)_{\beta\alpha} \} = e^2 \{ \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu S^{(1)}(x-x') \gamma_\nu \psi(x') + \\ &+ \bar{\Psi}(x') \gamma_\nu S^{(1)}(x'-x) \gamma_\mu \psi(x) \} + \\ &+ \frac{ie^2}{2} Sp \{ S(x'-x) \gamma_\mu S^{(1)}(x-x') \gamma_\nu + S(x-x') \gamma_\nu S^{(1)}(x'-x) \gamma_\mu \} \end{aligned}$$

ed in conseguenza del fatto che il termine contenente lo Spur, moltiplicato per $A_\mu(x)A_\nu(x')$, dopo aver eseguito la somma rispetto a μ e ν si annulla, si ottiene

$$\begin{aligned} (5) \quad -\frac{e^2}{2} \int \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu S^{(1)}(x-x') \gamma_\nu \psi(x') A_\mu(x) A_\nu(x') dx dx' = \\ = -\frac{1}{4} \int \{j_\mu(x), j_\nu(x')\} A_\mu(x) A_\nu(x') dx dx'. \end{aligned}$$

Introducendo la densità dell'Hamiltoniana di interazione

$$(6) \quad H(x) = -j_\mu(x) A_\mu(x),$$

si verifica subito che

$$\begin{aligned} \int \varepsilon(x-x') H(x) H(x') dx dx' &= \frac{1}{2} \int \varepsilon(x-x') [H(x), H(x')] dx dx', \\ \int H(x) H(x') dx dx' &= \frac{1}{2} \int \{H(x), H(x')\} dx dx'. \end{aligned}$$

Poichè per la (6), sempre nel caso di un potenziale esterno assegnato si ha

$$(7) \quad \begin{cases} [H(x), H(x')] = [j_\mu(x), j_\nu(x')] A_\mu(x) A_\nu(x') \\ \{H(x), H(x')\} = \{j_\mu(x), j_\nu(x')\} A_\mu(x) A_\nu(x'), \end{cases}$$

⁽¹⁴⁾ SII, eq. (3.68). Si è ommesso l'indice 1 perchè ci siamo già messi per ipotesi nel caso di una sola particella.

si ottiene in definitiva, introducendo le (4), (5) nella (3)

$$\begin{aligned}
 (8) \quad a = & -i \int_{-\infty}^{\infty} H(x) dx + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \varepsilon(x-x') H(x) H(x') + \\
 & + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' H(x) H(x') + \dots = \\
 = & -i \int_{-\infty}^{\infty} H(x) dx + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\sigma} dx' H(x) H(x') + \dots
 \end{aligned}$$

Confrontando la (8) con l'Eq. (24) di D I od anche con la (4.7) di S I in cui si sia sostituita l'espressione di $U[\sigma]$ ottenuta risolvendo la (4.6) in approssimazioni successive, si ottiene

$$(9) \quad a = S - 1,$$

dove S è il noto «invariant collision operator».

In questo modo si è ottenuto per altra via il risultato di DYSON ⁽¹⁵⁾ sull'interpretazione delle matrici di Feynman come matrici S .

Volendo includere l'interazione tra il campo elettroni-positroni ed il campo elettromagnetico, si avrà che $A_{\mu}(x)$ ed $A_{\nu}(x')$ (che conterranno eventualmente il campo esterno assegnato) non commuteranno più. Si sostituiranno allora le (7) con

$$(7-bis) \quad \left\{ \begin{aligned} [H(x), H(x')] &= \frac{1}{2} [A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] \{j_{\mu}(x), j_{\nu}(x')\} + \\ &+ \frac{1}{2} [j_{\mu}(x), j_{\nu}(x')] \{A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')\} \\ \{H(x), H(x')\} &= \frac{1}{2} [A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] [j_{\mu}(x), j_{\nu}(x')] + \\ &+ \frac{1}{2} \{A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')\} \{j_{\mu}(x), j_{\nu}(x')\} . \end{aligned} \right.$$

L'espressione (1) di partenza, scritta nel formalismo di Feynman, conterrà oltre alla funzione $K_{+(2,1)}$ degli elettroni, anche la funzione $\delta_{+}(s_{21}^2)$ di propagazione dei fotoni virtuali emessi e riassorbiti. Poichè

$$\delta_{+}(s_{21}^2) = 4\pi \left\{ \overline{D}(x'' - x') + \frac{i}{2} D^{(1)}(x'' - x') \right\}$$

⁽¹⁵⁾ DII, Section II.

ed inoltre è

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i\delta_{\mu\nu}D(x-x'),$$

$$\langle \{A_\mu(x), A_\nu(x')\} \rangle_0 = \delta_{\mu\nu}D^{(1)}(x-x'),$$

ci si può facilmente ricondurre all'espressione (9) anche nel caso più generale.

3. - Esaminiamo ora il principio variazionale per il « reaction operator ». Esso è definito come ⁽¹⁶⁾

$$K = i \frac{S-1}{S+1}.$$

Risolvendo per approssimazioni successive SCHWINGER ottiene ⁽¹⁷⁾

$$(10) \quad \frac{S-1}{S+1} = -\frac{i}{2} \int H(x) dx + \left(\frac{-i}{2}\right)^2 \int \varepsilon(x-x') H(x) H(x') dx dx' + \dots$$

Tenendo conto delle (4), (7), (6) si ha subito

$$(11) \quad 2 \frac{S-1}{S+1} = -e \int \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x) A_\mu(x) dx +$$

$$+ ie^2 \int \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \bar{S}(x-x') \gamma_\nu \Psi(x') A_\mu(x) A_\nu(x') dx dx' + \dots$$

Si osserva che la (11) differisce dalla (3) per l'assenza del termine con la funzione $S^{(1)}(x)$, in altre parole equivale alla (1) nella quale si sia sostituito $K_{+(2,1)}$ con $i\bar{S}(x''-x')$ invece che con la (2). Questo spiega perchè tanto per a come per K valga il medesimo principio variazionale; infatti tanto $K_{+(2,1)}$ che $\bar{S}(x''-x')$ sono funzioni di Green per l'equazione di Dirac dell'elettrone libero, e, poichè il principio variazionale si ottiene trasformando l'equazione differenziale in equazione integrale nella quale figura una funzione di Green, appare subito che i due operatori dati dalle (3) e (11) devono ubbidire al medesimo principio.

4. - È opportuno far vedere come, nel caso di un elettrone sottoposto all'azione di un potenziale esterno indipendente dal tempo, si ottenga partendo dalla (11) proprio la « scattering amplitude » caratteristica dei problemi d'urto, che è stata dedotta, nel lavoro citato ⁽²⁾, partendo dall'espressione (1). È noto che per questa grandezza vale un principio variazionale stabilito da

⁽¹⁶⁾ SI, eq. (4.15).

⁽¹⁷⁾ SIII, eq. (1.24). $K(x)$ in questa equazione equivale al nostro $H(x)$, in quanto si tien conto solo del campo assegnato.

SCHWINGER ⁽¹⁸⁾ che è stato largamente usato per la determinazione degli sfasamenti asintotici o di altre grandezze simili in problemi analoghi ⁽¹⁹⁾.

Nel caso in cui A_μ ha solo la quarta componente, e questa risulta indipendente dal tempo ($A_4 = ieA(\mathbf{r})$), l'energia dell'elettrone è costante, e la ψ del campo elettronico risulta separabile in una $\psi(\mathbf{r})$ moltiplicata per $\exp[-iWt]$: la $\psi(\mathbf{r})$ ubbidisce all'equazione di Dirac stazionaria per il valore W dell'energia.

La (11) si può scrivere:

$$2\bar{K} = \int \psi^*(x)A(x) \{ \psi(x) + i \int \bar{S}(x-x')A(x')\psi(x') dx' + \dots \} dx.$$

Con \bar{K} si indica che siamo nel caso di A indipendente dal tempo; ψ^* è il complesso coniugato di ψ ed è $\psi^* = \bar{\psi}\gamma_4$.

Introducendo la rappresentazione in integrale di Fourier per $\bar{S}(x-x')$ ⁽²⁰⁾

$$\bar{S}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \exp[ik_\mu(x_\mu - x'_\mu)] \frac{(i\gamma_\mu k_\mu - \kappa)}{k_\mu k_\mu + \kappa^2},$$

nella quale va introdotta per $1/(k_\mu k_\mu - \kappa^2)$ l'espressione di parte principale di $1/\tau$

$$P \frac{1}{\tau} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\tau}{\tau^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\tau + i\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{1}{\tau - i\varepsilon}$$

e $d^4k = dk_0 dk_1 dk_2 dk_3$, è facile seguire prima l'integrazione rispetto a k_0 e poi rispetto a t' ed a t .

Il procedimento è identico a quello seguito ⁽²¹⁾ partendo dalla (1) ed introducendo per $K_{+(2,1)}$ la sua rappresentazione in integrale di Fourier:

$$K_{+(2,1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \exp[ik_\mu(x_\mu - x'_\mu)] \frac{(i\gamma_\mu k_\mu - \kappa)}{k_\mu k_\mu + \kappa^2 - i\varepsilon}$$

In ambedue i casi si ottiene:

$$(12) \quad \bar{a} = 2\bar{K} = \int \psi^*(\mathbf{r})A(\mathbf{r}) \{ \psi(\mathbf{r}) - \int G_W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')A(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \dots \} d\mathbf{r},$$

dove $G_W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è la funzione di Green per l'equazione di Dirac stazionaria relativa al valore W dell'energia.

⁽¹⁸⁾ J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **72**, 742 (1947).

⁽¹⁹⁾ W. KOHN: *Phys. Rev.*, **74**, 1763 (1948); J. M. BLATT e J. D. JACKSON: *Phys. Rev.*, **76**, 18 (1949); G. TORALDO DI FRANCA: *Nuovo Cimento*, **7**, 255 (1950).

⁽²⁰⁾ SIII, eq. (1.66).

⁽²¹⁾ V. eq. (10), (13) del lavoro citato ⁽²⁾.

È già stato discusso ⁽²⁾ in che modo la (12) si identifichi con la « scattering amplitude » $a(\theta, \varphi)$, il cui modulo al quadrato dà la sezione d'urto per la diffusione nella direzione individuata dagli angoli θ, φ rispetto alla direzione di incidenza.

È un piacere ringraziare il dott. L. A. RADICATI per le numerose discussioni avute sull'argomento e per aver letto il manoscritto.

SUMMARY

Relationships between a variational principle for the transition probability amplitude of a system under the action of a time-dependent potential, and the variational principle established by SCHWINGER for the « reaction operator K », are studied. Some results already obtained by DYSON concerning the meaning of Feynman's method as an S -matrix method, and the relationship between Feynman's and Schwinger's formulations of quantum electrodynamics, are found in a different way. In the case of a time independent potential both methods give Schwinger's variational principle for « scattering amplitudes » already extensively used for phase shift determination in scattering problems.

Proprietà di trasformazione dei campi di Spin $1/2$.

A. GAMBA

Istituto di Fisica del Politecnico - Torino

(ricevuto il 10 Ottobre 1950)

Riassunto. — Estendendo alcune considerazioni di YANG e TIOMNO, si dimostra l'esistenza di 16 tipi diversi di funzioni d'onda soddisfacenti un'equazione di Dirac, che si differenziano per il loro comportamento nelle inversioni degli assi spaziali e temporale. Se ne discutono le conseguenze per la ricerca di una interazione universale alla Fermi.

Introduzione.

In una recente nota C. N. YANG e J. TIOMNO ⁽¹⁾ hanno ripreso da un nuovo punto di vista lo studio delle proprietà di trasformazione dei campi di spin $1/2$, con particolare riguardo all'inversione spaziale I_s ($x'_k = -x_k$, $x'_4 = x_4$; $k = 1, 2, 3$).

Secondo YANG e TIOMNO il diverso comportamento in una trasformazione I_s caratterizza quattro diversi tipi di funzioni d'onda e quindi altrettanti tipi di particelle. Queste considerazioni portano gli autori a una revisione piuttosto radicale (soprattutto dal punto di vista concettuale) delle idee consuete sull'invarianza dei termini di interazione. Il maggior numero di possibilità agevola il compito della ricerca di una forma universale di interazione valida per un insieme qualunque di quattro particelle di Dirac.

In questa nota si riprende lo studio delle proprietà di trasformazione dei campi di spin $1/2$ e, con considerazioni che sono la naturale generalizzazione di quelle di YANG e TIOMNO, si dimostrerà l'esistenza di un numero ancora maggiore di possibilità. Come conseguenza un tipo di processo che da

⁽¹⁾ C. N. YANG e J. TIOMNO: *Phys. Rev.*, **79**, 495 (1950)

YANG e TIOMNO doveva essere escluso con ipotesi *ad hoc*, può essere eliminato senza uscire dal quadro della teoria generale.

1. — Lo stato attuale del problema.

Notazioni. — Useremo la convenzione della somma sugli indici ripetuti: gli indici greci variano fra 1 e 4, gli indici latini fra 1 e 3. x_k indica le tre coordinate spaziali e $x_4 = ict$ la coordinata temporale. Scriveremo l'equazione di Dirac nella forma

$$(1) \quad \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + \frac{mc}{\hbar} \psi = 0.$$

È noto ⁽²⁾ che in una trasformazione generale di Lorentz delle coordinate

$$(2) \quad x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \quad (a_{rs}, a_{44} \text{ reali; } a_{k4}, a_{4k} \text{ immaginari puri})$$

la (1) rimane invariata con γ^μ invariate, se la ψ subisce una opportuna trasformazione del tipo

$$(3) \quad \psi' = \Lambda \psi;$$

dove Λ è una matrice a quattro righe e quattro colonne. La Λ è determinata dalla (2) a meno di un fattore che, normalizzato con la condizione $\det \Lambda = 1$, può ancora assumere i valori $\pm 1, \pm i$.

Finchè ci si limita a trasformazioni di Lorentz proprie (senza inversione degli assi) la scelta fra questi quattro fattori non presenta difficoltà: ovvie ragioni di continuità suggeriscono la scelta del fattore $+1$. Ben altrimenti avviene nel caso di inversioni, poichè in tal caso le ragioni di continuità citate non sussistono più. Così si può porre.

$$(4) \quad \text{per } x'_k = -x_k, \quad x'_4 = +x_4 \quad \Lambda = \pm \gamma^4, \pm i\gamma^4$$

$$(5) \quad \text{per } x'_k = +x_k, \quad x'_4 = -x_4 \quad \Lambda = \pm \gamma^5 \gamma^4, \pm i\gamma^5 \gamma^4, \\ \gamma^5 = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4.$$

PAULI ⁽²⁾ sceglieva per entrambe le trasformazioni il fattore $+1$ per semplicità. Successivamente RACAHA ⁽³⁾ dimostrò che nella (4) la scelta del fattore $+i$ era più opportuna se si vuole conservare la simmetria fra particelle

⁽²⁾ W. PAULI: *Ann. Inst. Poincaré*, **6**, 109 (1936).

⁽³⁾ G. RACAHA: *Nuovo Cimento*, **14**, 322 (1937).

e antiparticelle non solo per le trasformazioni di Lorentz proprie, ma anche per le (4) e (5).

Il concetto di antiparticella è collegato alla possibilità di associare, mediante una relazione Lorentz-invariante, a ogni ψ (della particella) una φ (dell'antiparticella) che soddisfa alla (1) (con un cambiamento di segno della carica se figura nella (1) il termine di interazione col campo elettromagnetico). Tale relazione, come è ben noto, risulta essere

$$(6) \quad \varphi^* = C\psi.$$

φ^* complesso coniugato di φ e $C = B\gamma^4\gamma^5$ (B è una matrice non singolare a quattro righe e quattro colonne che ha la proprietà $\bar{\gamma}^\mu = B\gamma^\mu B^{-1}$ per ogni γ^μ . $\bar{\gamma}^\mu$ è la matrice trasposta di γ^μ).

Ricordiamo incidentalmente che anche nella (6) rimane un fattore indeterminato.

YANG e TIOMNO, a differenza di quanto si è fatto finora, preferiscono non scegliere un particolare fattore della (4), ma ammettere l'esistenza di vari tipi di funzioni d'onda, e quindi di particelle, che si comportano nello stesso modo in una trasformazione di Lorentz propria, in uno dei quattro modi (4) per l'inversione I_s .

Indicando rispettivamente come particelle del tipo A, B, C, D le particelle la cui funzione d'onda si trasforma per l'inversione I_s secondo $+\gamma^4, -\gamma^4, +i\gamma^4, -i\gamma^4$, è facile vedere che le antiparticelle di particelle del tipo A e B saranno del tipo B e A rispettivamente, le antiparticelle di particelle del tipo C, D saranno ancora del tipo C e D . Quest'ultimo fatto spiega la scelta fatta da RACAH.

Si comprende facilmente che i fattori che nel caso di particelle libere non hanno importanza, corrispondendo a un inessenziale cambiamento di fase, diventano invece essenziali quando si tratta di studiare l'interazione fra particelle di Dirac appartenenti a tipi diversi. Per questo si veda l'articolo citato di YANG e TIOMNO.

2. - Teoria generale.

Per passare dal gruppo delle trasformazioni di Lorentz proprie al gruppo generale che comprende anche tutte le possibili inversioni degli assi è sufficiente tener conto delle due inversioni, spaziale I_s e temporale I_t , date dalle (4) e (5). Ogni altra inversione si può esprimere come prodotto di I_s, I_t e di una conveniente trasformazione di Lorentz propria. I_s e I_t sono però fra loro completamente indipendenti. È allora naturale estendere le considerazioni di YANG e TIOMNO al caso della I_t . Si dovranno distinguere quattro

tipi di funzioni d'onda (e perciò di particelle) a seconda del comportamento presentato per la trasformazione (5). Diremo che una particella appartiene al tipo α , β , γ , δ a seconda che per l'inversione I_t la sua funzione d'onda si trasforma con la matrice $+i\gamma^5\gamma^4$, $-i\gamma^5\gamma^4$, $+\gamma^5\gamma^4$, $-\gamma^5\gamma^4$.

È facile anche qui dimostrare che le particelle del tipo α e β avranno antiparticelle del tipo β e α rispettivamente, e le particelle del tipo γ , δ antiparticelle ancora del tipo γ , δ .

In definitiva ci saranno quindi complessivamente 16 tipi differenti di particelle che si distinguono per il loro comportamento nelle trasformazioni I_s e I_t e che saranno indicate con due lettere. Per esempio le particelle originarie di Pauli sono del tipo $A\gamma$, quelle di Racah del tipo $C\gamma$ e così via.

3. - L'interazione universale.

Assumeremo anche noi come interazione universale quella proposta da YANG e TIOMNO, e cioè l'interazione di WIGNER-CRITCHFIELD ⁽⁴⁾ con l'accoppiamento

$$(7) \quad \chi = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \psi_{\alpha}^r(\mathbf{x}) \psi_{\beta}^s(\mathbf{x}) \psi_{\gamma}^t(\mathbf{x}) \psi_{\delta}^u(\mathbf{x}) ;$$

dove $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \pm 1$ è completamente antisimmetrico in tutti gli indici, $\psi_{\alpha}^r(\mathbf{x})$ è la componente α -esima del campo della r -esima particella.

Richiedendo l'invarianza relativistica della (7) per il gruppo totale di Lorentz per tutti i campi di particelle di Dirac è chiaro che le varie ψ non potranno appartenere a tipi arbitrari. Più precisamente delle $\binom{7}{4} = 35$ possibili combinazioni diverse dei tipi A, B, C, D , saranno permessi, per la richiesta invarianza per una trasformazione I_s , solo gli accoppiamenti dei tipi seguenti

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} AAAA, BBBB, CCCC, DDDD, AACD, \\ BB CD, ABCC, ABDD, AAB B, CCDD. \end{array} \right.$$

Lo stesso si dica per i tipi α , β , γ , δ . Risultano permessi soltanto gli accoppiamenti

$$(9) \quad \alpha\alpha\alpha\alpha, \beta\beta\beta\beta, \gamma\gamma\gamma\gamma, \delta\delta\delta\delta, \alpha\alpha\gamma\delta, \beta\beta\gamma\delta, \alpha\beta\gamma\gamma, \alpha\beta\delta\delta, \alpha\alpha\beta\beta, \gamma\gamma\delta\delta.$$

Studiando gli accoppiamenti del tipo (8) YANG e TIOMNO sono riusciti a

⁽⁴⁾ C. L. CRITCHFIELD: *Phys. Rev.*, **63**, 416 (1943).

far rientrare in una interazione del tipo (7) tutti i processi

$$(10) \quad \begin{cases} N \rightarrow P + e + \nu \\ P + \mu^- \rightarrow N + \nu \\ \mu^- \rightarrow e + 2\nu, \end{cases}$$

mentre risultano esclusi perchè non invarianti i processi

$$(11) \quad \begin{cases} N + P \rightarrow \bar{e} + \bar{\nu} \\ N + P \rightarrow \bar{e} + \nu, \end{cases}$$

dove la sopralineatura indica l'antiparticella. Ciò si ottiene ammettendo, per esempio, che il protone P e il neutrone N appartengano al tipo A ; il mesone μ , l'elettrone e e il neutrino ν al-tipo C .

Con questa assegnazione non può però essere escluso il processo

$$(12) \quad P + \mu \rightarrow P + e,$$

che, come è ben noto, è in contraddizione con l'esperienza poichè la cattura dei mesoni negativi da parte dei nuclei pesanti avviene senza emissione di elettroni.

Questa difficoltà può essere superata se si prendono in considerazione gli accoppiamenti (9) relativamente alla trasformazione I_t : è allora facile escludere anche il caso (12), pur restando ancora validi i processi (10). Per questo basterà assegnare il protone e il neutrone al tipo γ , il mesone e il neutrino al tipo α , l'elettrone dal tipo β .

In definitiva si può raggiungere lo scopo di far rientrare le (10) nella forma (7), escludendo contemporaneamente i processi (11) e (12), attribuendo le varie particelle ai tipi indicati nella seguente tabella:

Particelle	Tipo per la I_s	Tipo per la I_t
Protone	A	γ
Neutrone	A	γ
Mesone	C	α
Elettrone	C	β
Neutrino	C	α

Questo modo di assegnare le particelle ai vari tipi non è però l'unico possibile. Solo con la scoperta di nuove particelle di Dirac e di nuovi processi sarà forse possibile escludere alcune delle varie alternative.

Lo schema proposto è comunque ancora sufficientemente largo per potervi inserire un discreto numero di processi.

L'autore ringrazia il prof. G. WATAGHIN per le utili discussioni sull'argomento.

SUMMARY

Generalizing a suggestion by YANG and TIOMNO, the existence of 16 different types of fields of spin $1/2$ is pointed out with reference to the transformation properties under a general inversion of space-time coordinates. The possibility of a universal Fermi-type interaction is discussed.

A new Meaning for Gauge Transformations in Electrodynamics.

P. A. M. DIRAC

St. John's College - Cambridge

(ricevuto il 22 Ottobre 1950)

Summary. — The dynamical theory of the electromagnetic field in interaction with the PAULI-WEISSKOPF field is worked out with the states defined on general space-like surfaces in space-time. A method is used which allows general gauge transformations $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial S / \partial x^\mu$ with the function S arbitrary. A new assumption is then introduced which connects the gauge with the surfaces on which the states are defined. The Hamiltonian takes on a simplified form, in which the interaction terms are of quite a different type from the usual theory.

1. — Introduction.

In relativistic field dynamics the state of the system is described by the physical conditions on a space-like three-dimensional surface in four-dimensional space-time. The equations of motion give the change in these physical conditions when the surface is moved in space-time in any way so as to remain space-like. Let us suppose the surface to vary continuously with some independent variable τ ; remaining always space-like. The physical conditions on the surface then provide us with dynamical variables varying continuously with τ . The equations of motion for these dynamical variables can be put in the Hamiltonian form, from which one can pass over to the quantum theory, as has been shown in two papers by the author, (*Canadian Journ. of Maths.*, **2**, 129 (1950) and **3**, (1951) in the press) which will be referred to hereafter as I and II respectively.

Let us suppose that as τ increases each element of the surface moves always into the future. There is then just one surface through each point in

This paper formed the subject of a lecture given at Turin University on the 24th August, 1950.

space-time, and the whole set of surfaces for all τ values can be defined by an equation

$$(1) \quad \tau = f(x_0, x_1, x_2, x_3),$$

where f is a single-valued function of the four coordinate x_μ in space-time. The principle of relativity requires that all physical laws shall be independent of the choice of surfaces, and thus one could work equally well with a different set of surfaces, say

$$(2) \quad \tau = g(x_0, x_1, x_2, x_3),$$

g being any single-valued function that makes all the surfaces space-like. It must therefore be possible to transform the dynamical equations from a form referring to the surfaces f to a form referring to the surfaces g . This gives us a wide group of transformations to which the dynamical equations must be subject.

The above considerations apply to any relativistic field theory. In the case of electrodynamic there is a further group of transformations to which the dynamical equations must be subject – the gauge transformations. In II a dynamical theory of the electromagnetic field in the absence of charges was set up without the usual supplementary condition $\partial A_\mu / \partial x_\mu = 0$, so that the equations of motion $\partial^2 A_\mu / \partial x_\nu \partial x_\nu = 0$ no longer hold. With such a theory one can make gauge transformations

$$(3) \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial S / \partial x^\mu$$

with S any function of the x 's. A corresponding dynamical theory with these general gauge transformations can be set up also when there are charges present.

It is an unnecessary complication to have both of these groups of transformations independently in electrodynamical theory. It would be reasonable to make the hypothesis that *the two kinds of transformation are connected in such a way that, whenever we make a transformation of the surfaces from (1) to (2), we simultaneously make a gauge transformation (3) with S given by*

$$(4) \quad g - f = eS,$$

and vice versa, e being some universal constant, which may conveniently be taken to be the electronic charge. With this hypothesis the theory is still relativistic, since we can still make arbitrary changes in the surfaces, and it is still gauge invariant, since we can still apply gauge transformations (3). We have a single group of transformations serving both purposes.

The new hypothesis requires some restriction in the gauge transformations. With given surfaces (1), the only gauge transformations now allowed are those for which the function g defined by (4) gives surfaces that are all space-like. The restriction is a slight one, not affecting the order of the number of gauge

transformations. It should be noted that the function S that characterizes a transformation can depend on the state, i. e. S can be a function of the dynamical variables as well as the x 's.

The new hypothesis provides a geometrical interpretation for gauge transformations. It has the further advantage that it introduces a great simplification into the dynamical theory that works with states on general space-like surfaces. By reducing the number of independent transformations under which the equations must be invariant, it makes less difficult the problem of avoiding infinities in quantum field dynamics.

The present paper shows how the coupling between the gauge and the surfaces required by the new hypothesis can be established for the electromagnetic field interacting with an assembly of PAULI-WEISSKOPF electrons, (electrons without spin satisfying BOSE statistics). There probably exists a corresponding theory for spinning electrons with FERMI statistics, but it is not so simple, as FERMI statistics is not so closely analogous to classical theory, and has not yet been worked out.

2. - The Electromagnetic Field in the Absence of Charges.

The general methods and notation of paper I and II will be followed here. A new treatment will be given of the electromagnetic field in the absence of charges. The treatment of this example in II used the four potentials A_μ as dynamical coordinates. The new treatment uses instead the components $A^r \equiv y_\mu{}^r A_\mu$ and $A_i \equiv l_\mu A_\mu$ of A as dynamical coordinates. It has the advantage that the dynamical coordinates A_i and their conjugate momenta drop out from the Hamiltonian formulation.

The difference between the two treatments is not trivial, because the momenta w_μ conjugate to the surface variables y_μ are different. The w_μ of the first treatment have zero P. b. with A_ν , and thus do not have zero P. b. with A^r and A_i , as the w_μ of the new treatment must. The difference in the w_μ variables in the two cases is connected with their different geometrical meanings. In the first case the w_μ are associated with deformations of the surface and its parametrization which leave $A_\nu(u)$ invariant, in the second case with deformations which leave $A^r(u)$ and $A_i(u)$ invariant.

We shall use the upper suffix τ to denote the τ derivative of a quantity, as an alternative to the dot notation. We have

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} A_\mu{}^\tau &\equiv (l_\mu l_\sigma + y_{\mu\tau} y_\sigma{}^\tau) A_\sigma{}^\tau \equiv \\ &\equiv l_\mu \{ (l_\sigma A_\sigma)^\tau - l_\sigma{}^\tau A_\sigma \} + y_{\mu\tau} \{ (y_\sigma{}^\tau A_\sigma)^\tau - y_\sigma{}^{\tau\tau} A_\sigma \} \equiv \\ &\equiv l_\mu A_i{}^\tau - l_\mu l_\sigma{}^\tau A_\sigma + y_{\mu\tau} A^{\tau\tau} - y_{\mu\tau} \dot{y}_\sigma{}^\tau A_\sigma. \end{aligned} \right.$$

The Lagrangian is, according to equations (48) and (85) of II,

$$L \equiv -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \dot{y}_l \Gamma d^3u.$$

Varying the velocities in L , keeping the dynamical coordinates unchanged, we get

$$\delta L = \int F_{\mu\nu} \left\{ \delta A_{\mu\nu} \dot{y}_l - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \delta \dot{y}_l \right\} \Gamma d^3u.$$

From the equation following (50) of II with A_μ written for V , we get

$$\delta A_{\mu\nu} \dot{y}_l = l_\nu (\delta A_{\mu}{}^r - A_{\mu\sigma} \delta \dot{y}_\sigma).$$

Using the value for $A_\mu{}^r$ given by (5), we now get

$$\begin{aligned} \delta L &= \int F_{\mu\nu} \left\{ l_\nu (l_\mu \delta A_l{}^r - l_\mu A_{\sigma} \delta l_\sigma{}^r + y_{\mu r} \delta A^{rr} - y_{\mu r} A_{\sigma} \delta \dot{y}_\sigma{}^r - A_{\mu\sigma} \delta \dot{y}_\sigma) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \delta \dot{y}_l \right\} \Gamma d^3u = \\ &= \int \left\{ F_{\mu\nu} l_\nu y_{\mu r} \delta A^{rr} \Gamma + (F_{\mu\nu} l_\nu y_{\mu r} A_{\sigma} \Gamma)^r \delta \dot{y}_\sigma - F_{\mu\nu} l_\nu A_{\mu\sigma} \delta \dot{y}_\sigma \Gamma - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} l_\sigma \delta \dot{y}_\sigma \Gamma \right\} d^3u. \end{aligned}$$

The momenta w_σ , B_r , B_l conjugate to y_σ , A^r , A_l respectively are defined so that

$$\delta L = \int \{ w_\sigma \delta \dot{y}_\sigma + B_r \delta A^{rr} + B_l \delta A_l{}^r \} d^3u.$$

Thus

$$(6) \quad B_r = F_{\mu\nu} l_\nu y_{\mu r} \Gamma.$$

$$(7) \quad B_l = 0,$$

$$(8) \quad \begin{cases} w_\sigma = (F_{\mu\nu} l_\nu y_{\mu r} A_{\sigma} \Gamma)^r - F_{\mu\nu} l_\nu A_{\mu\sigma} \Gamma - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} l_\sigma \Gamma = \\ = (B_r A_{\sigma})^r - B_\mu A_{\mu\sigma} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} l_\sigma \Gamma. \end{cases}$$

Equations (6) and (7) are in agreement with (68) of II, showing that the momenta B are the same in both treatments.

Equation (7) is a Φ equation, in the sense defined in I. Taking the tangential part of (8) by multiplying it by $y_\sigma{}^r$, we get

$$(9) \quad w^r = y_\sigma{}^r (B_s A_\sigma)^s - B_\mu A_\mu{}^r.$$

This is also a Φ equation. Let us rewrite it in terms of A^r and A_l instead

of A_μ . We have

$$y_\sigma{}^r(B_s A_\sigma)^s \equiv (y_\sigma{}^r B_s A_\sigma)^s - y_\sigma{}^{rs} B_s A_\sigma \equiv (B_s A^r)^s - y_\sigma{}^{sr} B_s A_\sigma,$$

$$\begin{aligned} B_\mu A_\mu{}^r &\equiv (l_\mu B_l + y_\mu{}^s B_s) A_\mu{}^r \equiv l_\mu B_l (l_\mu A_l + y_\mu{}^s A_s)^r + B_s \{ (y_\mu{}^s A_\mu)^r - y_\mu{}^{sr} A_\mu \} \equiv \\ &\equiv B_l A_l{}^r + l_\mu B_l y_\mu{}^{sr} A_s + B_s A^{sr} - B_s y_\mu{}^{sr} A_\mu. \end{aligned}$$

Thus (9) becomes

$$w^r = (B_s A^r)^s - B_l A_l{}^r - l_\mu B_l y_\mu{}^{sr} A_s - B_s A^{sr}.$$

We now see that, if we define

$$(10) \quad \Phi^r \equiv w^r + B_l A_l{}^r + B_s A^{sr} - (B_s A^r)^s,$$

we have

$$\Phi^r = 0,$$

with the help of (7). The Φ^r defined by (10) is the first class Φ associated with changes of parametrization of the surface. It is of the standard form (47) of II, with the addition of an extra term, the term $-(B_s A^r)^s$. This extra term is needed because $A^r(u')$ is not a u -scalar at u' , but gets changed by a change of parametrization which leaves the point u' invariant and rotates the u -axes in the neighbourhood of u' . With the change of parametrization (36) of II, the extra term gives rise to an extra change in $A^q(u')$, ($q = 1, 2, 3$) of the amount, according to equation (37) of II

$$\begin{aligned} dA^q(u') &= -\varepsilon \left[A^q(u'), \int a_r (B_s A^r)^s d^3u \right] = \varepsilon \left[A^q(u'), \int a_r{}^s B_s A^r d^3u \right] = \\ &= \varepsilon \delta_a^q \int a_r{}^s \delta(u - u') A^r d^3u = \varepsilon a_r{}^q(u') A^r(u'). \end{aligned}$$

This is just the change in $A^r(u')$ due to the rotation of the u -axes in the neighbourhood of u' .

We have for the Hamiltonian, corresponding to (61) of II,

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} H &= \int \{ w^r \dot{y}_r + w_i \dot{y}_i + B_s (A^s l_\nu + A^s_{\nu}) \dot{y}_\nu + \\ &\quad + B_l (A_{ll} l_\nu + A_{l\nu}) \dot{y}_\nu - \mathcal{L} \dot{y}_i \Gamma \} d^3u = \\ &= \int \dot{y}_l \left(w_l + B_s A^s_l + B_l A_{ll} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \Gamma \right) d^3u + \\ &\quad + \int \dot{y}_r (w^r + B_s A^{sr} + B_l A_l{}^r) d^3u. \end{aligned} \right.$$

We must express it linearly in terms of Φ 's. Let us define

$$(12) \quad F^{rs} \equiv A^{sr} - A^{rs} \equiv (y_\mu{}^s A_\mu)^r - (y_\mu{}^r A_\mu)^s \equiv y_\nu{}^s A_\nu{}^r - y_\mu{}^r A_\mu{}^s \equiv y_\mu{}^r y_\nu{}^s F_{\mu\nu}$$

and

$$F_{rs} \equiv \gamma_{r\bar{p}} \gamma_{sq} F^{\bar{p}q}.$$

Then

$$F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \equiv (l_\mu l_\sigma + y_{\mu r} y_\sigma^r)(l_\nu l_\sigma + y_{\nu s} y_\sigma^s) F_{\mu\nu} F_{\sigma\sigma} \equiv 2l_\mu l_\sigma y_{\nu s} y_\sigma^s F_{\mu\nu} F_{\sigma\sigma} + F_{rs} F^{rs}.$$

From (6) we can infer the strong equation

$$0 \equiv 2(F_{\mu\nu} l_\mu y_{\nu s} + B_s \Gamma^{-1})(F_{\sigma\sigma} l_\sigma y_\sigma^s + B^s \Gamma^{-1}).$$

Hence

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - F_{rs} F^{rs} &\equiv -2B_s B^s \Gamma^{-2} - 4F_{\mu\nu} l_\mu y_{\nu s} B_s \Gamma^{-1} \equiv \\ &\equiv -2B_s B^s \Gamma^{-2} + 4B_s l_\mu (A_\mu^s - A_{\nu\mu} y_\nu^s) \Gamma^{-1} \equiv \\ &\equiv -2B_s B^s \Gamma^{-2} + 4B_s l_\mu (A_\mu^s - A_\mu^s + A_{\nu\mu} y_\nu^s) \Gamma^{-1}. \end{aligned}$$

Some of the terms in the expression (11) for H can now be written

$$\begin{aligned} \int \dot{y}_i \left(B_s A^s_i + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \Gamma \right) d^3u &\equiv \\ &\equiv \int \dot{y}_i \left(\frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} \Gamma - \frac{1}{2} B_s B^s \Gamma^{-1} + B_s l_\mu A_\mu^s + B_s A_{\nu\mu} l_\mu y_\nu^s \right) d^3u. \end{aligned}$$

The last term here gives, with the help of equation (49) of II with y_ν^s for V ,

$$\begin{aligned} \int \dot{y}_i B_s A_{\nu\mu} l_\mu y_\nu^s d^3u &\equiv \int B_s A_\nu (y_\nu^{sr} - y_\nu^{sr} \dot{y}_r) d^3u \equiv \\ &\equiv - \int \{ (B_s A_\nu)^s \dot{y}_\nu + B_s A_\nu y_\nu^{rs} \dot{y}_r \} d^3u \equiv \\ &\equiv - \int \{ (B_s A_\nu)^s (l_\nu \dot{y}_i + y_\nu^r \dot{y}_r) + B_s A_\nu y_\nu^{rs} \dot{y}_r \} d^3u \equiv \\ &\equiv - \int \{ (B_s^s A_\nu + B_s A_\nu^s) l_\nu \dot{y}_i + (B_s A^r)^s \dot{y}_r \} d^3u. \end{aligned}$$

The Hamiltonian (11) now becomes

$$\begin{aligned} (13) \quad H &\equiv \int \dot{y}_i \left(w_i + \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} \Gamma - \frac{1}{2} B_s B^s \Gamma^{-1} - B_s^s A_i \right) d^3u + \\ &\quad + \int \dot{y}_r \Phi^r d^3u + \int \dot{y}_i A_{li} B_i d^3u, \end{aligned}$$

with Φ^r defined by (10).

The coefficients of \dot{y}_i and \dot{y}_r in the first two terms here are functions of the dynamical coordinates and momenta only, and are the first class Φ 's associated with the motion of the surface normal to itself and changes of para-

métrization. The last term involves the first class Φ , B_i , and gives rise to changes of gauge without any motion of the surface, since we may suppose $\dot{y}_i A_{ii}$ to be finite with \dot{y}_i zero. This term becomes more significant if we rewrite the Hamiltonian as

$$(14) \quad H \equiv \int \dot{y}_i \left(w_i + \frac{1}{4} E_{rs} E_{rs} \Gamma - \frac{1}{2} B_s B^s \Gamma^{-1} - B_s^s A_i \right) d^3u + \\ + \int \dot{y}_r \Phi^{*r} d^3u + \int A_i{}^r B_i d^3u,$$

with Φ^{*r} defined to be Φ^r with the term referring to A_i and B_i omitted, i. e.

$$(15) \quad \Phi^{*r} \equiv w^r + B_s A^{sr} - (B_s A^r)^s = 0.$$

The last term now gives an arbitrary rate of change of A_i with no motion of the surface.

From the equations of motion one can deduce

$$(16) \quad (B_{-\mu} \Gamma^{-1})_{-\mu} = 0,$$

the same as equation (87) of II. It is a χ equation, in the sense defined in I. We can put it in a more convenient form. We have

$$y_{\mu r} y_{\mu}{}^{sr} \equiv \gamma_{vr} y_{\mu}{}^p y_{\mu}{}^{rs} \equiv \frac{1}{2} \gamma_{vr} (y_{\mu}{}^p y_{\mu}{}^r)^s \equiv \frac{1}{2} \gamma_{vr} \gamma^{vr s} \equiv \Gamma^{-1} \Gamma^s,$$

or

$$y_{\mu r} (y_{\mu}{}^s \Gamma^{-1})^r \equiv 0.$$

Hence

$$(17) \quad (B_{-\mu} \Gamma^{-1})_{-\mu} \equiv y_{\mu r} (B_s y_{\mu}{}^s \Gamma^{-1})^r \equiv y_{\mu r} B_s{}^r y_{\mu}{}^s \Gamma^{-1} \equiv B_s^s \Gamma^{-1}.$$

Thus we may take

$$(18) \quad \chi \equiv B_s^s = 0.$$

This χ is easily seen to be first class, like (16).

Before we can quantize the theory we must generalize the equations of motion by changing the first class χ 's into first class Φ 's. This generalization will allow arbitrary changes of gauge to take place without any motion of the surface, as explained in II. The generalization is effected by adding to the Hamiltonian a term of the form of (99) of II, or, using the present χ ,

$$(19) \quad \int v B_s^s d^3u,$$

with the coefficient v arbitrary.

With this term added on to the expression (14) for H , we can omit the last term in the coefficient of \dot{y}_i , as it can be absorbed in (19). We are left with

an expression for H from which A_i and B_i have disappeared, except for the last term $\int A_i{}^r B_i d^3u$. The effect of this term on the equations of motion is merely to give an arbitrary motion to A_i . It does not affect the motion of any of the other dynamical variables. We may therefore omit this term and drop the variables A_i and B_i from the theory altogether. The final expression for H is

$$(20) \quad H \equiv \int \dot{y}_i \left(w_i + \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} \Gamma - \frac{1}{2} B_s B^s \Gamma^{-1} \right) d^3u + \int \dot{y}_r \Phi^{*r} d^3u + \int v B_s{}^s d^3u.$$

3. - The Electromagnetic Field Interacting with the Pauli-Weisskopf Field.

An assembly of PAULI-WEISSKOPF electrons is described by a complex field function ψ . The action density for these electrons in interaction with the electromagnetic field is

$$(21) \quad \mathcal{L}^+ \equiv \frac{1}{2} (\bar{\psi}_\mu - ie A_\mu \bar{\psi})(\psi_\mu + ie A_\mu \psi) - \frac{1}{2} m^2 \bar{\psi} \psi,$$

in addition to the action density for the electromagnetic field alone ⁽¹⁾. To get an understanding of the new ideas of the present paper in their simplest form, we shall work with this action density classically, interpreting the equations as applying to a classical field described by ψ interacting with the electromagnetic field. As the equations are all in the Hamiltonian form, one can make a passage from them to the quantum theory by the usual rules.

Let us replace the complex field ψ by two real ones, putting

$$\psi \equiv R \exp [-i\theta],$$

with R and θ real. The action density (21) becomes

$$(22) \quad \mathcal{L}^+ \equiv \frac{1}{2} R_\mu R_\mu + \frac{1}{2} R^2 (\theta_\mu - e A_\mu)(\theta_\mu - e A_\mu) - \frac{1}{2} m^2 R^2.$$

Treating R and θ as dynamical coordinates, we must introduce momenta, P and ρ say, conjugate to them. They will be given, according to formula (53)

⁽¹⁾ W. PAULI and V. WEISSKOPF: *Helv. Phys. Acta*, 7, 709 (1934). See equation (37). The factors \hbar and c here are put equal to unity in the present paper, and an extra factor $1/2$ is introduced into the action density for convenience.

of II, by

$$(23) \quad P = \partial \mathcal{L}^+ / \partial R_\mu \cdot l_\mu \Gamma = R_l \Gamma,$$

$$(24) \quad \rho = \partial \mathcal{L}^+ / \partial \theta_\mu \cdot l_\mu \Gamma = R^2(\theta_l - eA_l)\Gamma.$$

The momenta B_r and B_l conjugate to A_r and A_l will be given, as before, by (6) and (7). The momenta w_σ conjugate to y_σ will now equal expression (8) plus some extra terms, namely

$$(25) \quad -PR_\sigma - \rho\theta_\sigma + \mathcal{L}^+ l_\sigma \Gamma,$$

according to formula (54) of II.

The extra terms in w_σ will give rise to the extra terms

$$(26) \quad PR^r + \rho\theta^r,$$

to be subtracted from the right-hand side of (9) and to be added to the right-hand side of (10). The extra terms in Φ^r will lead to the correct changes in the u -scalars R , θ and u -scalar densities P , ρ under changes of parametrization. The extra terms (26) must also be added on to Φ^{*r} defined by (15).

The Hamiltonian will now be given by expression (11) with the w 's having their new meanings and with the extra terms

$$(27) \quad \begin{aligned} & \int \{ P(R_l l_r + R_{-r}) \dot{y}_r + \rho(\theta_l l_r + \theta_{-r}) \dot{y}_r - \mathcal{L}^+ \dot{y}_l \Gamma \} d^3u \equiv \\ & \equiv \int \dot{y}_l (PR_l + \rho\theta_l - \mathcal{L}^+ \Gamma) d^3u + \int \dot{y}_r (PR^r + \rho\theta^r) d^3u. \end{aligned}$$

added on. The second term of (27) will get absorbed into the second term of expressions (13) and (14) for H to give the new meanings of Φ^r and Φ^{*r} . The first term of (27) must be transformed so that the coefficient of \dot{y}_l involves only the dynamical coordinates and momenta and must then be added on to the first term of expression (13) and (14).

The coefficient of \dot{y}_l in (27) is strongly equal to

$$(28) \quad \begin{aligned} PR_l + \rho\theta_l - \frac{1}{2} \{ R_l^2 + R_r R^r + R^2(\theta_l - eA_l)^2 + \\ + R^2(\theta_r - eA_r)(\theta_r - eA^r) - m^2 R^2 \} \Gamma. \end{aligned}$$

From (23) and (24) we get the strong equations

$$\frac{1}{2} (P - R_l \Gamma)^2 \Gamma^{-1} \equiv 0, \quad \frac{1}{2} \{ \rho - R^2(\theta_l - eA_l) \Gamma \}^2 R^{-2} \Gamma^{-1} \equiv 0.$$

Adding their left-hand sides to (28), it becomes

$$(29) \quad \frac{1}{2} P^2 \Gamma^{-1} - \frac{1}{2} R_r R^r \Gamma + \frac{1}{2} \rho^2 R^{-2} \Gamma^{-1} - \\ - \frac{1}{2} R^2 (\theta_r - e A_r) (\theta^r - e A^r) \Gamma + \frac{1}{2} m^2 R^2 \Gamma + e \rho A_t.$$

This is of the desired form and must be added to the coefficient of \dot{y}_t in (13) or (14) to give the Φ associated with the motion of the surface normal to itself in the present theory.

The field equations (58) of II give, when applied to A_r with our present action density,

$$(30) \quad (F_{r\mu})_{,\mu} = -e R^2 (\theta_r - e A_r).$$

This may be compared with (71) of II. Following the deduction which led to (73) of II, we now get

$$(31) \quad (B_{-\mu} \Gamma^{-1})_{-\mu} = e R^2 (\theta_t - e A_t) = e \rho \Gamma^{-1},$$

with the help of (24). Using (17), this gives

$$(32) \quad B_s^s - e \rho = 0.$$

This is the χ equation of the present theory. It is easily verified to be first class, by the same arguments as in the absence of charges, as given in II.

The physical meaning of equation (31) or (32) may be noted. Equation (6) shows that the electric field in the surface is $B_{-\mu} \Gamma^{-1}$. The three-dimensional divergence of this field is the left-hand side of (31). The electric density relative to the surface is, according to PAULI and WEISSKOPF's equation (42) and taking the extra factor 1/2 of the present action density into account, $e R^2 l_r (\theta_r - e A_r)$ or the right-hand side of (31). Thus equation (31) or the equivalent equation (32) is MAXWELL's equation connecting electric density with $\text{div } E$.

To prepare the theory for quantization, we must again change the first class χ 's into first class Φ 's, and so allow arbitrary changes of gauge to take place without any motion of the surface. We effect this change by adding to the Hamiltonian the term

$$(33) \quad \int v (B_s^s - e \rho) d^3 u,$$

with the coefficient v arbitrary. We then have a Hamiltonian consisting of (14), with expression (29) added to the coefficient of \dot{y}_t , plus (33). The terms involving A_t and B_t in this Hamiltonian are

$$(34) \quad \int \dot{y}_t (-B_s^s + e \rho) A_t d^3 u + \int A_t^r B_t d^3 u.$$

The first term here can be absorbed in (33), and we then have a Hamiltonian from which A_i and B_i have disappeared, except for the term $\int A_i B_i d^3u$. As before, the effect of this term on the equations of motion is merely to give an arbitrary motion to A_i , and we can therefore omit it and drop the variables A_i and B_i from the theory altogether.

For the further development of the theory it is convenient to substitute $e^{-1}B_s^s$ for ρ in H . This substitution changes H by a multiple of $B_s^s - e\rho$ integrated over the u 's, which can be absorbed in (33). We are left with

$$(35) \quad H \equiv \int \dot{y}_i \left\{ w_i + \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} \Gamma - \frac{1}{2} B_s B^s \Gamma^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} P^2 \Gamma^{-1} - \frac{1}{2} R_r R^r \Gamma + \frac{1}{2} e^{-2} (B_s^s)^2 R^{-2} \Gamma^{-1} - \frac{1}{2} R^2 (\theta_r - e A_r) \times \right. \\ \left. \times (\theta^r - e A^r) \Gamma + \frac{1}{2} m^2 R^2 \Gamma \right\} d^3u + \\ \left. + \int \dot{y}_r \Phi^{*r} d^3u + \int v (B_s^s - e\rho) d^3u .\right.$$

We can get a simple meaning for the v in (35). The equation of motion for θ is

$$(36) \quad \dot{\theta} = [\theta, H] = \dot{y}_r \theta^r - ev .$$

We have also

$$\dot{\theta} = \dot{y}_\mu \theta_\mu = \dot{y}_r \theta^r + \dot{y}_i \theta_i ,$$

so we can infer

$$ev = -\dot{y}_i \theta_i .$$

4. - The Coupling of the Gauge and the Surfaces.

Up to the present the space-like surfaces on which the states are defined are completely arbitrary. Let us now make the assumption that *the surfaces must be chosen such that on each of them the field function θ is constant*. By suitably choosing the independent variable τ we can then arrange that the equation of all the surfaces is

$$(37) \quad \theta = \tau .$$

Under a gauge transformation the function θ changes according to

$$(38) \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta S / \delta x^\mu , \quad \theta \rightarrow \theta + eS ,$$

as this leaves the action density (22) invariant. With our present dynamical

theory we can take S to be any function of the x 's, as the coefficients A_r in (34) and v in (35) are entirely at our disposal for all τ values. Thus the change in θ can be any function of the x 's and the surfaces given by equation (37) can be changed arbitrarily. We have now set up a coupling between the gauge and the surfaces of the kind discussed in the introduction. We must make the restriction that only those gauges are allowed for which the surfaces given by (37) are space-like.

The new assumption leads to a considerable simplification of the Hamiltonian. The variables $\theta(u)$ for different values of u are no longer independent dynamical coordinates, but are all equal and so give us just one dynamical coordinate θ . When we put all the $\theta(u)$ equal we can work only with quantities having zero P. b. with all the differences $\theta(u) - \theta(u')$. The quantity

$$(39) \quad Q \equiv \int \rho \, d^3u$$

satisfies these conditions and is the only independent function of the ρ 's which does. It will be the momentum conjugate to the single dynamical coordinate θ remaining in the theory.

Since θ is constant on the surface, we have

$$(40) \quad \theta^r = 0.$$

From (37) we get $\dot{\theta} = 1$, so (36) gives $ev = -1$. The last term of (35) now becomes

$$(41) \quad -e^{-1} \int (B_s{}^s - e\rho) \, d^3u \equiv Q$$

from (39), neglecting the integral of a divergence, which can be transformed to involve only variables at infinity. We can omit the term (41) from H , and so let the variables θ and Q drop out of the theory, without affecting the equations of motion of any of the other dynamical variables. We are left with

$$(42) \quad H \equiv \int \dot{y}_i \left\{ w_i + \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} \Gamma - \frac{1}{2} B_s B^s \Gamma^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} P^2 \Gamma^{-1} - \frac{1}{2} R_r R^r \Gamma + \frac{1}{2} m^2 R^2 \Gamma + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} e^{-2} (B_s{}^s)^2 R^{-2} \Gamma^{-1} - \frac{1}{2} e^2 R^2 A_r A^r \Gamma \right\} d^3u + \int \dot{y}_r \Phi^{*r} d^3u.$$

The expression for Φ^{*r} , namely (15) with the extra terms (26), reduces to

$$(43) \quad \Phi^{*r} \equiv w^r + B_s A^{sr} - (B_s A^r)^s + P R^r.$$

Equations (42) and (43) give the final form for the Hamiltonian in the present theory.

The equations of motion that follow from this Hamiltonian still allow an arbitrary motion of the surface normal to itself, associated with a first class Φ which is the coefficient of \dot{y}_i in (42), and arbitrary changes of parametrization, associated with Φ^{*r} , but allow no further freedom. This is because there is no longer any arbitrariness of gauge when the motion of the surface is fixed.

For practical purposes one would naturally choose the surfaces in the simplest possible way. One could take them to be flat surfaces perpendicular to the time axis, say the surfaces $x_0 = \tau$, and one could then fix the parametrization by taking $u_1 = x_1$, $u_2 = x_2$, $u_3 = x_3$. This would make the Hamiltonian (42) reduce to, with omission of the term w , which is no longer significant,

$$(44) \quad H = \int \left\{ \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} - \frac{1}{2} B_s B^s + \frac{1}{2} P^2 - \frac{1}{2} R_r R^r + \frac{1}{2} m^2 R^2 + \frac{1}{2} e^{-2} (B_s{}^s)^2 R^{-2} - \frac{1}{2} e^2 R^2 A_r A^r \right\} d^3 u.$$

The Φ^{*r} terms have disappeared, as there is no longer any arbitrariness in the parametrization.

The Hamiltonian (44) contains terms independent of e , which are precisely the usual terms for the electromagnetic field and a real PAULI-WEISSKOPF field representing uncharged particles. It also contains the terms

$$(45) \quad \int \left\{ \frac{1}{2} e^{-2} (B_s{}^s)^2 R^{-2} - \frac{1}{2} e^2 R^2 A_r A^r \right\} d^3 u,$$

which are the interaction terms of the present theory. They are quite different from the usual interaction terms met with in theories of electrodynamics, as one of them contains the coefficient e^{-2} and does not automatically become small if e is made small. It follows that the Schrödinger equation of the present theory cannot be handled by the usual method of approximation, which treats the interaction as a perturbation and expands its effects as a power series in e .

The usual perturbation method of quantum electrodynamics is not satisfactory, because the interaction contributes an infinite amount to the self-energy of the electrons and so cannot legitimately be looked upon as a small perturbation. The present theory, by not allowing the interaction even formally to be treated as a perturbation, may lead to a new approach to these difficulties. It will require a new method to be devised for handling the Schrödinger equation.

The relationship of the present theory to the usual one may be summarized in the following way. One begins the theory of electrodynamics with a complete set of dynamical variables to describe the electromagnetic field and also the charged particles. This involves more variables than are neces-

sary, because a knowledge of the position of the charges gives one some information about the field. The existence of superfluous dynamical variables shows itself up through the appearance of supplementary conditions in the dynamical theory. The usual theory resolves the field into longitudinal and transverse waves and then eliminates the dynamical variables that describe the longitudinal waves in terms of then particle variables. The present theory eliminates instead some of the particle variables, namely θ and φ , in terms of the longitudinal field variables, in a way which does not need the separation of the field into longitudinal and transverse parts. This is an advantage, since the separation is a non-physical procedure and spoils the relativistic appearance of the theory.

RIASSUNTO (*)

Si elabora la teoria dinamica del campo elettromagnetico in interazione col campo di PAULI-WEISSKOPF, definendo gli stati su superficie generiche di tipo spaziale dello spazio-tempo. Si impiega un metodo che consente trasformazioni di gauge generali $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial S / \partial x^\mu$, con S funzione arbitraria. Si introduce quindi una nuova ipotesi che connette la « gauge » con le superficie sulle quali sono definiti gli stati. L'hamiltoniana assume una forma semplificata, nella quale i termini di interazione sono di tipo del tutto differente da quelli della teoria ordinaria.

(*) A cura della Redazione del *Nuovo Cimento*.

Sull'intensità delle righe esterne Raman e infrarosse dei cristalli.

A. LOINGER

Istituto di Fisica dell'Università - Pavia

(ricevuto il 26 Ottobre 1950)

Riassunto. — Si tratta il problema di due oscillatori accoppiati, quale si presenta in alcuni cristalli costituiti da ioni complessi, allo scopo di mettere in relazione le intensità Raman ed i coefficienti di assorbimento per l'infrarosso, dovuti alle oscillazioni esterne del reticolo, colle forze agenti fra gli ioni.

1. — In un cristallo costituito da ioni complessi (come per es. la calcite) le vibrazioni esterne risultano dall'accoppiamento di oscillazioni di traslazione con oscillazioni angolari appartenenti alla medesima classe di simmetria ⁽¹⁾.

Tenendo presenti le varie possibilità di accoppiamento, si può rendere ragione, in accordo con l'esperienza, del numero e degli stati di polarizzazione delle frequenze esterne attive in Raman e in infrarosso: facendo poi alcune ipotesi semplici sulle forze interioniche ed assumendo come date alcune frequenze sperimentali si ricavano altre frequenze del reticolo; e confrontando queste ultime con quelle fornite dall'esperienza, si può, fino a un certo punto, controllare l'attendibilità delle ipotesi assunte circa le forze agenti tra gli ioni ⁽²⁾.

Nella presente nota ci proponiamo di prendere in considerazione anche l'intensità delle righe Raman e infrarosse; in tal modo il confronto con l'esperienza potrà dare ulteriori informazioni sulle forze interioniche. Almeno ne-

⁽¹⁾ L. GIULOTTO e G. OLIVELLI: *Nuovo Cimento*, **5**, 52 (1948); *Journ. of Chem. Phys.*, **16**, 555 (1948); A. KASTLER: *Compt. Rend.*, **227**, 1024 (1948); *Proc. Ind. Ac. Sci.*, **28**, 349 (1948).

⁽²⁾ L. GIULOTTO e G. OLIVELLI: *Nuovo Cimento*, **6**, 231 (1949); *Rend. Istit. Lomb.*, **82**, fasc. 1 (1949).

casi più semplici (ai quali pel momento vogliamo limitarci) il problema si può schematizzare, per quanto concerne la diffusione Raman, al modo seguente: si hanno due oscillatori accoppiati e la polarizzabilità viene ad essere legata al moto di uno solo di essi.

Similmente, nel caso dell'infrarosso il problema si riduce a considerare altri due oscillatori accoppiati: il momento elettrico dipende dal moto di uno di essi.

2. - Supponendo le oscillazioni angolari di piccola ampiezza, alla coordinata angolare si può sostituire una opportuna coordinata lineare, così che l'hamiltoniana dei due oscillatori accoppiati si scrive semplicemente:

$$(1) \quad H = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} (m_1 \Omega_1^2 x_1^2 + m_2 \Omega_2^2 x_2^2 - 2a^2 x_1 x_2),$$

ove m_1 ed m_2 sono le masse, Ω_1 e Ω_2 le pulsazioni delle oscillazioni disaccoppiate, $-a^2 = m_1 \Omega_1^2 \gamma_1 = m_2 \Omega_2^2 \gamma_2$, γ_1 e γ_2 sono i coefficienti di accoppiamento.

Ponendo $\eta_1 = m_1^{1/2} x_1$, $\eta_2 = m_2^{1/2} x_2$ ed operando successivamente una sostituzione ortogonale opportuna, la (1) si può, come è noto, ridurre alla forma canonica:

$$(2) \quad \frac{1}{2} (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) + \frac{1}{2} (\rho_1 \xi_1^2 + \rho_2 \xi_2^2),$$

con

$$(3) \quad \begin{cases} \rho_1, \rho_2 = \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 \pm \sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + 4\gamma_1\gamma_2\Omega_1^2\Omega_2^2}}{2} \\ \begin{cases} x_1 = -\frac{(\gamma_1\gamma_2)^{1/2}\Omega_1\Omega_2}{m_1^{1/2}[\gamma_1\gamma_2\Omega_1^2\Omega_2^2 + (\Omega_1^2 - \rho_1)^2]^{1/2}} \xi_1 - \frac{(\Omega_1^2 - \rho_1)}{m_1^{1/2}[\gamma_1\gamma_2\Omega_1^2\Omega_2^2 + (\Omega_1^2 - \rho_1)^2]^{1/2}} \xi_2 \\ x_2 = \frac{(\Omega_1^2 - \rho_1)}{m_2^{1/2}[\gamma_1\gamma_2\Omega_1^2\Omega_2^2 + (\Omega_1^2 - \rho_1)^2]^{1/2}} \xi_1 - \frac{(\gamma_1\gamma_2)^{1/2}\Omega_1\Omega_2}{m_2^{1/2}[\gamma_1\gamma_2\Omega_1^2\Omega_2^2 + (\Omega_1^2 - \rho_1)^2]^{1/2}} \xi_2 \end{cases} \end{cases}$$

La (2) è l'hamiltoniana di due oscillatori armonici indipendenti di masse unitarie e di frequenze:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\rho_1}, \quad \nu_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\rho_2}$$

Pertanto la sua diagonalizzazione si esegue nel modo ben noto.

3. - Calcoliamo ora il rapporto delle intensità delle due righe Raman ν_1 e ν_2 . Il momento elettrico indotto è in generale $\mu = \alpha E$, ove α è il tensore della polarizzabilità elettronica ed $E = E_0 \exp [2\pi i \nu t]$ il vettore elettrico della

luce incidente. La parte di momento che riguarda la diffusione Raman è

$$\mu = E \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \xi_1} \right)_0 \xi_1 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \xi_2} \right)_0 \xi_2 \right],$$

ove l'indice 0 sta ad indicare la posizione di equilibrio.

Come si è detto, nel nostro caso la polarizzabilità è legata alla variazione di una sola delle coordinate originali, sia ad es. la x_1 . Perciò

$$\mu = E \left(\frac{d\alpha}{dx_1} \right)_0 (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2),$$

ove gli a_{ik} sono i coefficienti delle (3).

Gli elementi di matrice di μ non nulli (se ci limitiamo alle linee Stokes) sono

$$(\mu)_{\substack{n_1 \rightarrow n_1 + 1 \\ n_2 \rightarrow n_2}} = E_0 \left(\frac{d\alpha}{dx_1} \right)_0 a_{11} \sqrt{\frac{h}{8\pi^2\nu_1}} \sqrt{n_1 + 1} \exp [2\pi i[(\nu - \nu_1)t + \varphi_1]]$$

$$(\mu)_{\substack{n_1 \rightarrow n_1 \\ n_2 \rightarrow n_2 + 1}} = E_0 \left(\frac{d\alpha}{dx_1} \right)_0 a_{12} \sqrt{\frac{h}{8\pi^2\nu_2}} \sqrt{n_2 + 1} \exp [2\pi i[(\nu - \nu_2)t + \varphi_2]],$$

e pertanto il rapporto delle intensità emesse rispettivamente dagli « oscillatori » ξ_1 e ξ_2 viene ad essere

$$\frac{J_{n_1}^{(1)}}{J_{n_2}^{(2)}} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 \Omega_1^2 \Omega_2^2 \rho_2^{1/2}}{(\Omega_1^2 - \rho_1)^2 \rho_1^{1/2}} \left(\frac{\nu - \nu_1}{\nu - \nu_2} \right)^4 \frac{n_1 + 1}{n_2 + 1}.$$

Il rapporto delle intensità totali si trova subito mediante la legge di distribuzione di Boltzmann ed è

$$(4) \quad \frac{I^{(1)}}{I^{(2)}} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 \Omega_1^2 \Omega_2^2 \rho_2^{1/2}}{(\Omega_1^2 - \rho_1)^2 \rho_1^{1/2}} \left(\frac{\nu - \nu_1}{\nu - \nu_2} \right)^4 \frac{1 - \exp [-h\nu_2/kT]}{1 - \exp [-h\nu_1/kT]}.$$

4. - Il momento dipolare attivo in infrarosso sia $m = qx'_1 = q(a'_{11}\xi_1 + a'_{12}\xi_2)$ ⁽³⁾ se q è la carica dello ione.

I coefficienti di probabilità di assorbimento (le righe di assorbimento sono

⁽³⁾ Si indicano con un apice le coordinate e le grandezze relative all'infrarosso; naturalmente nei casi particolari alcune di esse verranno a coincidere con quelle analoghe dell'effetto Raman.

quelle che interessano sperimentalmente) sono

$$B^{(1)} = \frac{2\pi^2}{3h} q^2 \frac{\gamma_1' \gamma_2' \Omega_1'^2 \Omega_2'^2}{m_1' [\gamma_1' \gamma_2' \Omega_1'^2 \Omega_2'^2 + (\Omega_1'^2 - \rho_1')^2] \rho_1'^{1/2}} \frac{1}{1 - \exp[-h\nu_1'/kT]}$$

$$B^{(2)} = \frac{2\pi^2}{3h} q^2 \frac{(\rho_1'^2 - \rho_1')^2}{m_1' [\gamma_1' \gamma_2' \Omega_1'^2 \Omega_2'^2 + (\Omega_1'^2 - \rho_1')^2] \rho_2'^{1/2}} \frac{1}{1 - \exp[-h\nu_2'/kT]}$$

Le grandezze aventi un significato sperimentale diretto sono però i coefficienti d'assorbimento della legge $I = I_0 \exp[-\chi s]$, ove I è l'intensità della luce incidente ed s lo spessore di cristallo attraversato.

I χ si mettono facilmente in relazione coi B e risulta:

$$(5) \quad \frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(2)}} = \frac{\gamma_1' \gamma_2' \Omega_1'^2 \Omega_2'^2}{(\Omega_1'^2 - \rho_1')^2} \frac{1 - \exp[-h\nu_2'/kT]}{1 - \exp[-h\nu_1'/kT]}$$

Ci proponiamo di applicare questi risultati, eventualmente generalizzandoli, ad alcuni casi particolari importanti e di metterli in relazione con dei dati sperimentali.

Ringrazio il prof. L. GIULOTTO per le utili discussioni cui gentilmente si è prestato.

SUMMARY

In several crystals built up by complex ions, the multiplicity of the external Raman and infrared lines must be attributed to couplings of angular and translatory vibrations. In the present paper we give relations between the Raman intensities, the infrared absorption coefficients respectively, and the interionic forces. In the simplest cases, the problem can be treated as the problem of two coupled linear oscillators; the Raman or infrared activity depends upon the motion of one of them. With the introduction of normal coordinates we are reduced to the case of two independent oscillators. In this way formulae (4) for the Raman intensities and (5) for the infrared absorption coefficients are easily obtained.

Cloud Chamber Observations on the Electromagnetic Component from Nuclear Explosions and the Development of the Nuclear Cascade.

A. LOVATI, A. MURA, G. SALVINI (*) and G. TAGLIAFERRI

Istituto di Fisica dell'Università - Milano

(ricevuto il 27 Ottobre 1950)

Summary. — The results of a research on nuclear explosions, made at the Laboratorio della Testa Grigia (3500 m a.s.l.) with a counter controlled cloud chamber are reported. Principal aim of the research is to study the electromagnetic component arising from nuclear explosions and the development of the nuclear cascade.

1. — Introduction.

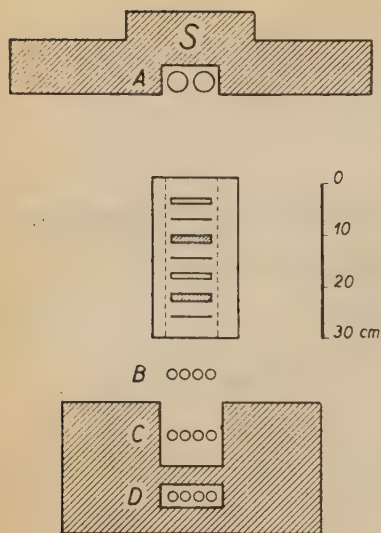
We have been carrying out research on nuclear explosions at the Laboratorio della Testa Grigia (3500 m a.s.l.) from December 1949 to March 1950 using a counter controlled cloud chamber in order to continue the study of the electromagnetic component from nuclear explosions and the development of the nuclear cascade ⁽¹⁾.

The experimental arrangement, apart from the plates contained in the chamber ⁽²⁾, is the same as the one used in LMST I and is represented in fig. 1.

(*) Now at the Palmer Physical Laboratory, Princeton, N.J.

⁽¹⁾ A. LOVATI, A. MURA, G. SALVINI and G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **7**, 36 (1950), referred to in the present paper as LMST I; A. LOVATI, A. MURA, G. SALVINI and G. TAGLIAFERRI: *Phys. Rev.*, **77**, 284 (1950).

⁽²⁾ The arrangement of the plates in the chamber in LMST I was as follows: Lead 16.5 g/cm² (referred to as Pb I); Lead 16.5 g/cm² (referred to as Pb II); Carbon, Lead, Carbon, Lead, Carbon all 1.8 g/cm².



Expansions of the chamber occur when at least one counter of group *A* and at least two counters of each of the groups *B*, *C* and *D* have been discharged. There are seven plates in the chamber, arranged from top to bottom as follows:

Carbon . . .	1.8 g/cm ²	
Lead . . .	1.8	»
Lead . . .	16.5	» (referred to as Pb I)
Carbon . . .	1.8	»
Lead . . .	1.8	»
Lead . . .	16.5	» (referred to as Pb II)
Lead . . .	1.8	»

Fig. 1. — The experimental layout.

These results refer to a total of 4660 photographs taken in 1286 operation hours

(among which 2120 photos taken in 610 hours referring to the results already published in LMST I).

2. — The Electromagnetic Component of Nuclear Explosions.

2.1. — Several investigators using the cloud chamber⁽³⁾⁽¹⁾ pointed out the high percentage of nuclear explosions in which the electromagnetic component is produced, and the peculiar spread out of electrons which indicates that more than one photon or electron is often created at its origin. Other authors⁽⁴⁾, analysing in detail a large explosion in nuclear emulsion, noticed the production of several pairs of electrons in the core of the shower of mesons and protons. The hypothesis, according to which the electromagnetic component is produced by the disintegration of neutral mesons emitted directly in the explosion, has steadily gained ground, especially after the last experiments in Berkeley⁽⁵⁾, which have now put beyond doubt the existence of

⁽³⁾ C. Y. CHAO: *Phys. Rev.*, **75**, 581 (1949); W. B. FRETTER: *Phys. Rev.*, **76**, 511 (1949); B. ROSSI: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 104 (1949); B. P. GREGORY, B. ROSSI and J. H. TINLOT: *Phys. Rev.*, **77**, 299 (1950).

⁽⁴⁾ H. L. BRADT, M. F. KAPLON and B. PETERS: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 24 (1950).

⁽⁵⁾ R. BJORKLUND, W. E. CRANDALL, B. J. MOYER and H. F. YORK: *Phys. Rev.*, **77**, 213 (1950); W. K. H. PANOFSKY, L. AAMODT and H. F. YORK: *Phys. Rev.*, **78**, 825 (1950).

a neutral meson with a mass about $280 m_e$, disintegrating into two γ rays in a time shorter than 10^{-11} s.

CARLSON, HOOPER and KING (*) published recently the results of a research on γ radiation in the atmosphere at 70 000 ft, which was revealed by the pairs of electrons registered in nuclear emulsion. They report that the shape of the energy spectrum is consistent with the hypothesis that γ rays have their origin in the disintegration of neutral mesons; that the mass of the neutral meson is $295 \pm 20 m_e$ and its life time less than $5 \cdot 10^{-14}$ s; that the neutral mesons are created in the nuclear explosions with an energy spectrum similar to the one of the charged π mesons and in a quantity equal to about a half of the charged π mesons. Using a very elegant but rather indirect method based on the relation that the principles of conservation impose between the mass of the neutral meson and the energy distribution of the γ rays, CARLSON *et al.* try to prove that γ rays have their origin in the disintegration of neutral mesons. Although the experimental data fit very well this relation, it seems to us that the following criticism may leave some doubt:

— the revealed γ rays may have in a good percentage their origin otherwise than in a nuclear explosion;

— the distance between the nuclear explosion and the point where the γ ray is revealed is unknown and could be considerable, since the angular distribution of the γ rays given by the authors themselves is extremely broad. Moreover, it seems hard to evaluate this distance because the frequency-height law of nuclear explosions able to produce mesons is not yet well known. It cannot therefore be ruled out that a not inconsiderable percentage of the γ rays revealed are secondaries to the γ rays originated by the nuclear explosions.

In conclusion, the energy spectrum of the photons observed by these authors could be different from that of the photons emitted in the explosions. We consider therefore the examination on the photographs of the cloud chamber of the electromagnetic component originated directly by the nuclear explosions as fairly significant.

2.2. — For the purpose of studying the electromagnetic component we took the explosions produced in Pb I, the possible electromagnetic retinue of which could be analysed by means of the plate Pb II. These explosions are subject to an instrumental selection because at least two particles capable of traversing 4 cm of lead are required for the expansion of the chamber. We do not think that this selection is of any importance in connection with those explosions that give rise to an electromagnetic component and which also very likely

(*) A. G. CARLSON, J. E. HOOPER and D. T. KING: *Phil. Mag.*, **41**, 701 (1950).

give rise to the production of mesons. Out of a total of 106 explosions recognized on the basis of the criteria set out in LMST I, 51 of them show electromagnetic component at the bottom of the plate Pb II, with a total of 93 showers; 44 do not show electromagnetic component after Pb II; and 11 are

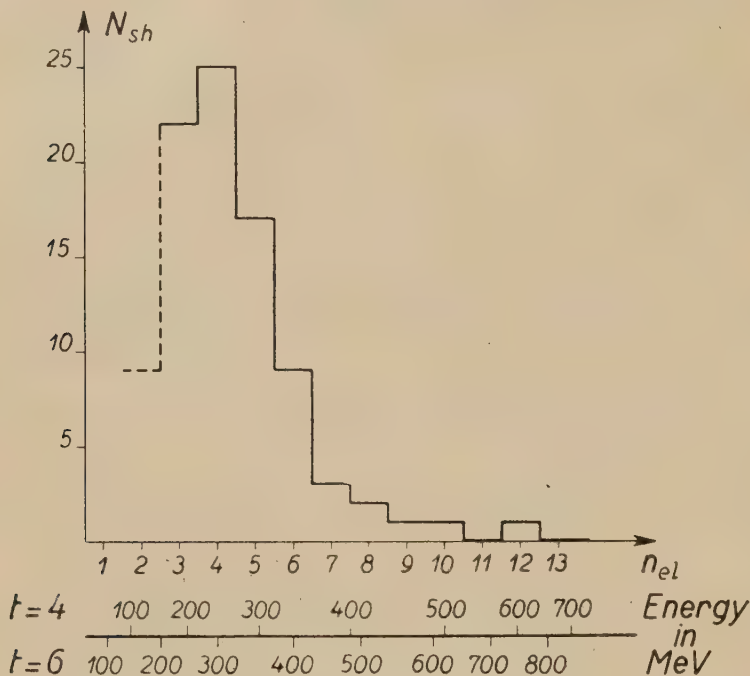


Fig. 2. — Number N_{sh} of electromagnetic showers observed at the bottom of the plate Pb II, plotted against the number n_{el} of electrons contained in each of them. Under the abscissa the values of the energy of the electromagnetic showers are given in the cases of $t = 4$ and $t = 6$.

dubious cases. It cannot be forthwith ruled out that in some cases what is considered to be an electromagnetic development is actually a new explosion of which only the lightly ionising particles are seen. An evaluation of the probabilities of the two processes assures us, however, that the percentage of such secondary showers of a non-electromagnetic nature is fairly small.

The histogram in fig. 2 shows the distribution of the electromagnetic showers observed at the bottom of the plate Pb II according to the number of electrons in each of them. The energy of these showers was estimated on the basis of the number of electrons after Pb II by utilising the new calculations of WILSON ⁽⁷⁾ on the electromagnetic cascade. The estimate of

(⁷) R. R. WILSON: *Phys. Rev.*, **79**, 204 (1950). We want to thank prof. WILSON for communicating his numerical results.

the energies is uncertain for two reasons: (i) on account of the importance of the fluctuations in the case of cascade showers containing few particles; (ii) because we do not exactly know the depth of production of the nuclear explosions in Pb I. Error (i) may be large in each shower but is within the limits of accuracy called for by statistics such as ours. As regards error (ii), it should be noted that the thickness of lead between the point where the explosion takes place and the bottom of Pb II where the electrons of the showers appear may vary, in radiation lengths, from $t = 3$ to $t = 6$. This, however, does not greatly affect the estimate of the energies since the electromagnetic cascade has a somewhat flat maximum, as far as the energies here interested are concerned, between $t = 3$ and $t = 6$. In any case, along the abscissa of the histogram of fig. 2, under the scale of the number of electrons we give the corresponding energies for $t = 4$ and $t = 6$ (calculated up to 300 MeV with WILSON's data and above 300 MeV with ARLEY's tables⁽⁸⁾).

Our distribution appears less rich in high energy events than the one reported by CARLSON *et al.* It must, however, be born in mind:

— that the calculation of the energies on the basis of cascade multiplication involves considerable uncertainty as regards the lower energies, while γ rays of an energy lower than a hundred MeV are not revealable at all (in our case a deduction of the mass of the neutral mesons after the manner of CARLSON *et al.* is therefore impossible);

— that the distribution of CARLSON *et al.* refers to the total γ radiation (at 70 000 ft), whereas our distribution refers to the radiation emitted in explosions revealed in the chamber by our arrangement of counters (at 11 500 ft).

If now we infer from the distribution of fig. 2, through the method used by CARLSON *et al.*, the energy spectrum of the neutral mesons which are supposed to have originated the electromagnetic showers we are observing, we still obtain a spectrum which is appreciably less rich in high energy events than the one deduced by the Bristol group for the neutral mesons. In any way, this difference cannot be emphasized, on account of the above mentioned diversity of the experimental conditions.

2.3. — The 106 explosions from Pb I show, after Pb II, a total of 93 electromagnetic showers and a total of 141 penetrating particles through Pb II. If we attribute the electromagnetic component to the neutral meson, it may be said at least 47 neutral mesons and at least 141 charged mesons and fast protons have been emitted in these explosions within the solid angle corresponding to Pb II. Apart from the uncertainty of the fractions both of

(⁸) N. ARLEY: *Stochastic Processes and Cosmic Radiation* (New York, 1949).

neutral mesons and of charged mesons and fast protons which have not been revealed (there is reason, however, to believe that these fractions are fairly small), and bearing in mind that the charged π mesons constitute $\sim 80\%$ of all the relativistic charged particles emitted directly in the explosions ^(*), the ratio of the number of neutral mesons to that of charged ones works out at $47/113 = 0.42 \pm 0.10$ (statistical error). We believe that this confirms the result indirectly obtained by CARLSON *et al.* according to which the neutral mesons are about half of the charged ones.

2.4. — The histogram of fig. 3 represents the projected angle distribution around the vertical of the directions of motion of the γ rays issuing from the nuclear explosions observed in our photographs. Obviously, as the incident particles producing our explosions have mostly directions close to the vertical, it may be believed that the distribution we are reporting represents also fairly well the distribution of the γ rays around these incident particles. This is not the case for CARLSON *et al.*, who report a very wide angular distribution

for their γ rays: in fact, the distribution they observe is also due to the wide angular spread of the very parent particles at balloon flight altitudes.

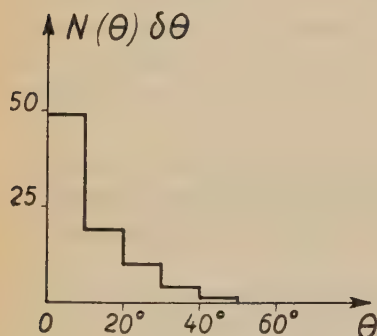


Fig. 3. — Projected angle distribution of the directions of motion of the γ rays issued from the observed nuclear explosions.

2.5. — Apart from any hypothesis as to the origin of the electromagnetic showers issuing from nuclear explosions, our research was also directed towards obtaining an indication whether there was always a photon, or even an electron, at the origin of these electromagnetic showers. This requirement is responsible for the particular arrangement of the plates within the chamber (see n. 1) capable of revealing the electromagnetic component from the explosions in the thin plates

of Pb and C by means of the thick lead plates (it is evident that a photon emitted in the explosion has little probability of converting itself into an electron through the thin plate, and vice versa). Only the nuclear explosions in the thin plates and the electromagnetic showers apparently produced by them after Pb I or Pb II have therefore been considered, and efforts have been made to discover whether or not explosions and showers were linked by ionising particles. Obviously, few and not very

(*) U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK and H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1950).

reliable were the cases to take into consideration for our purposes. Anyhow, 7 « origins by photons » and 5 « origins by electrons » were obtained along with 18 cases which were quite dubious. It should be noted, however, that whereas the cases of origin by photons are fairly reliable, the ones of origin by electrons are more uncertain on account of the possible superposition of other ionising particles. In conclusion, these results have been reported only to point out that both cloud chamber and nuclear plates ⁽¹⁰⁾ leave as yet quite obscure the question whether electrons may be directly ejected in nuclear explosions.

3. — The Development of the Nuclear Cascade.

3.1. — It is known that particles issuing from a nuclear interaction of cosmic radiation (nucleons and π mesons) can give rise in their turn to new nuclear interactions ⁽⁹⁾, ⁽¹¹⁾. The problem is to establish the characteristics of this cascade development. Comparison — in a cloud chamber or in nuclear emulsions — of successive explosions could provide material for the construction of theories on the production of mesons. As a first approach to these questions we have taken into consideration the successive nuclear explosions observed with our cloud chamber.

The two most different theories we can bear in mind concerning the production of mesons and the degradation of energy in the nucleon-nucleon interaction are: (a) the theory of HEITLER-JANOSSY ⁽¹²⁾ (plural production of mesons), and (b) the theory of WOUTHUYSEN ⁽¹³⁾, who calculated the nuclear cascade in the extreme case in which the nucleon-nucleon collision is completely inelastic as the theories of multiple production of mesons ⁽¹⁴⁾ would seem to indicate. The interest of WOUTHUYSEN's theory lies in the fact that it may be considered a development of HEISENBERG's point of view regarding the multiple production of mesons.

According to theory (a), the average fraction of energy lost by the incident nucleon in an elementary collision is comparatively small (in the paper of HEITLER-JANOSSY this fraction is assumed $\sim 1/4$). The energy of the primary may therefore be still comparable to the initial energy even after two, three

⁽¹⁰⁾ M. TEUCHER: *Naturwiss.*, **37**, 260 (1950).

⁽¹¹⁾ H. S. BRIDGE, W. E. HAZEN, B. ROSSI and R. WILLIAMS: *Phys. Rev.*, **74**, 1083 (1948); A. LOVATI, A. MURA, G. SALVINI and G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **6**, 207 (1949); W. B. FRETTER: see reference ⁽³⁾.

⁽¹²⁾ W. HEITLER and L. JANOSSY: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 417 (1950).

⁽¹³⁾ S. A. WOUTHUYSEN: *Phys. Rev.*, to be published.

⁽¹⁴⁾ W. HEISENBERG: *Zeits. Phys.*, **126**, 569 (1949); G. WATAGHIN: *Phys. Rev.*, **74**, 975 (1948) and **75**, 693 (1949); H. W. LEWIS, J. R. OPPENHEIMER and S. A. WOUTHUYSEN: *Phys. Rev.*, **73**, 127 (1948).

and four successive nucleon-nucleon collision, as many as probably happen within a nucleus of lead. An energetic primary should therefore give rise to successive nuclear explosions ⁽¹⁵⁾ even in a material as heavy as lead. The photographs of the cloud chamber should, moreover, show that a large part of the secondary explosions are still sufficiently energetic to appear with relativistic particles. Finally, we ought to have some examples of tertiary explosions, i.e. explosions following secondary ones.

According to theory (b), a primary nucleon of total energy E_0 is left, after collision with a nucleon, with the total energy

$$E_1 = \sqrt{\frac{1}{2} (E_0 + 1)}$$

in Mc^2 units, where M is the rest mass of the nucleon,

viz. with only the energy due to the velocity of the centre of mass of the two nucleons and to the rest mass of the nucleon. For example, a primary nucleon of 10 GeV will have a kinetic energy of about 1.5 GeV after a collision, and after the successive collision will probably drop to below the relativistic region. It would therefore be difficult for particles emitted by a nuclear explosion in lead to give rise to successive relativistic nuclear explosions, except in the case of a primary of extraordinarily great energy.

3.2. — Let us now consider our primary explosions in the lead S above the chamber (473 explosions in total). From BUTLER, ROSSER and BARKER's ⁽¹⁶⁾ results — since their experimental arrangement was not too different from ours — we can assume a lower limit of 2—3 GeV and an average value near to 5 GeV for the kinetic energy of the nucleons that produce the explosions in S . As to the distribution of the energies, this should not be far from a power law with an exponent of the order of 2—3 in the differential spectrum.

Let us then consider the secondary nuclear explosions in the thin plates of Pb or C produced by particles, whether ionising or not, emitted in the nuclear explosions revealed in the lead S (32 explosions in all). Owing to the thinness of the plates, which prevents an electromagnetic cascade, the relativistic particles that are seen to issue from these secondary explosions are chiefly protons and mesons. Moreover, we can believe that at least half of the secondary explosions which have occurred in the thin plates are revealed in the chamber (see LMST I in connection with this estimate). The distribution of the secondary nuclear explosions in the thin plates, reproduced

⁽¹⁵⁾ A nuclear explosion is the whole of the nucleon-nucleon and π meson-nucleon interactions which take place in a nucleus at the impact of an energetic particle.

⁽¹⁶⁾ C. C. BUTLER, W. G. W. ROSSER and K. H. BARKER: *Proc. Phys. Soc.*, A **63**, 145 (1950).

in the histogram of fig. 4, is therefore likely to be not very far from the true one. As is seen, there are many examples with two or more relativistic particles, and several with four or more. It may therefore be concluded that a large percentage of the particles emitted in the nuclear explosions in the lead S above the chamber has still a fairly high energy (probably ≥ 2 GeV).

3.3. — In addition, we obtained at least 7 photographs (see table) which show nuclear explosions, that have occurred in a plate of the chamber, which give rise by means of a relativistic ionising particle to new nuclear explosions in a thin plate of Pb or C. Two of these events constitute examples of « chains » of three explosions. As is seen from the table, the secondary or tertiary explosions in the thin plates al-

ways contain at least one relativistic ionising particle. The few examples given do not allow any definite conclusion to be drawn as to the average fraction of energy lost by incident nucleon. It may be thought, however, that among the two theories (a) and (b), the examples given here certainly would fit better into the former.

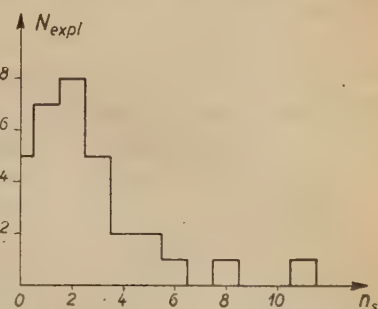


Fig. 4. - Number N_{expl} of the secondary nuclear explosions in thin plates, plotted against the number n_s of relativistic particles observed in each of them.

Chain Nuclear Explosions.

Number of the photograph	Locality of production of the nuclear explosions		
	Lead S	Plate Pb I or Pb II (16.5 g/cm ²)	Plate of Pb or C (1.8 g/cm ²)
33.34	(3 p.p.)	----->	(5 h - 4 s) - (2 h - 1 s)
41.31		(0 h - 7 s) ----->	(1 h - 3 s)
49.23		(2 h - 10 s) ----->	(2 h - 1 s)
54.4	(2 p.p.) ->	(0 h - 3 s) ----->	(3 h - 1 s)
71.7		(1 h - 8 s) ----->	(3 h - 2 s)
		----- (3 h - 1 s)	
122.13		(0 h - 3 s)	
		----->	(4 h - > 1 s)
145.2			(5 h - 8 s) -> (2 h - 1 s)

For the events in the lead S above the chamber we report the number of the penetrating particles (p.p.) observed in the chamber. For the events in the plates of the chamber, we report the numbers of the heavily ionising particles (h) and of the relativistic ones (s).

3.4. – What has been said in sections 3.2 and 3.3 disagrees with what would be expected from theory (b), which has been built up on the hypothesis of a completely inelastic nucleon-nucleon collision. Of course, after the observations of CAMERINI *et al.* ⁽⁹⁾, who showed that the cross section of the π mesons for nuclear interaction is not far from the geometrical value, the possibility that a part of the secondary explosions are due to π mesons cannot be ruled out. But HEISENBERG's scheme of nucleon-nucleon collision supposes the creation of many π mesons of small energy, such that their contribution to the generation of successive energetic explosions seems negligible.

FERMI ⁽¹⁷⁾ gave recently a new theory of the production of π -mesons in the case of completely inelastic nucleon-nucleon impact, in which it would seem that the mesons were created with a multiplicity considerably lower than in HEISENBERG's and LEWIS-OPPENHEIMER-WOUTHUYSEN's schemes. In this case the π mesons produced should have sufficiently high energy and it could not therefore be excluded that they should produce successive energetic explosions.

3.5. – In conclusion, the inspection of our secondary explosions in Pb and C leads to recognize that several relativistic particles emitted in previous nuclear explosions still have a kinetic energy so high that the hypothesis of completely inelastic nucleon-nucleon collision accompanied by the hypothesis of multiple production with high multiplicity (HEISENBERG, LEWIS *et al.*, WOUTHUYSEN) does not seem apt to account for our results. On the other hand, it seems more probable that our results can be framed in the HEITLER-JANOSSY's scheme or of FERMI's one.

Acknowledgements.

It is a pleasure to acknowledge our indebtedness to Prof. G. POLVANI, Director of this Institute, for his constant interest and encouragement in the course of this work.

We wish to express our gratitude to Prof. P. CALDIROLA and Prof. B. FERRETTI for helpful discussions.

Thanks are also due for the use of the facilities of the Laboratorio della Testa Grigia to the Director, Prof. G. BERNARDINI; and to Dr. M. BOSSI, Dr. C. SUCCI and Mr. S. TERRANI for their valuable assistance in carrying on the measurements.

(¹⁷) E. FERMI: *Phys. Rev.*, to be published.

The research was made possible by the financial helps of the University of Milan, of the Consiglio Nazionale delle Ricerche, of the Associazione Nazionale A.N.I.D.E.L. and of the Gruppo Amici dell'Istituto: to all of which we wish to express our warm thanks.

RIASSUNTO

È stata eseguita al Laboratorio della Testa Grigia, con camera di Wilson comandata da contatori di G.M., una ricerca sulle esplosioni nucleari, per studiare la componente elettromagnetica dalle esplosioni e lo sviluppo della cascata nucleare. Quanto alla componente elettromagnetica, assumendo che essa sia prodotta dalla disintegrazione di mesoni neutri emessi direttamente nell'esplosione, l'esame dei fotogrammi consente di ricavare uno spettro energetico dei mesoni neutri che è meno ricco in eventi di energia elevata di quello recentemente dedotto dal gruppo di Bristol con le emulsioni nucleari. Si ritrova anche, per via più diretta, che il numero dei mesoni neutri è circa la metà di quello dei mesoni π carichi. Quanto allo sviluppo della cascata nucleare, si confrontano i nostri risultati con due teorie estreme: quella di HEITLER-JANOSSY della produzione plurima dei mesoni, e quella di WOUTHUYSEN che, sviluppando il punto di vista di HEISENBERG sulla produzione multipla, considera il caso estremo di una collisione nucleone-nucleone completamente anelastica. Appare verosimile che i nostri risultati si inquadrino meglio nella rappresentazione di HEITLER-JANOSSY o in quella recente di FERMI, che non in quella di WOUTHUYSEN.



Multivibratore d'ingresso per coincidenze ad elevato potere risolutivo.

P. COLOMBINO

Istituto di Fisica della Università - Torino

(ricevuto il 10 Ottobre 1950)

Riassunto. — Viene descritto un circuito a sei canali per coincidenze con potere risolutivo inferiore al microsecondo applicato allo studio degli sciami penetranti, nel quale in ogni canale un particolare multivibratore a due valvole, di cui una a «cathode follower» è posto nella immediata vicinanza del contatore G.M.. Tale multivibratore, oltre a spegnere il contatore, fornisce un'uscita a bassa impedenza per il cavo schermato di collegamento al resto dell'apparecchio. Gli impulsi, opportunamente formati, vengono mescolati mediante nove unità di coincidenza ad uscita catodica realizzate con doppi triodi.

Per raggiungere poteri risolutivi elevati in circuiti di coincidenza occorre siano realizzate tra l'altro due importanti condizioni. In primo luogo è necessario utilizzare solo la primissima parte del segnale del contatore G.M. per eliminare i ritardi dovuti all'irregolare tempo di salita dell'impulso. È inoltre necessario ridurre al minimo tutte le capacità nocive in parallelo con il contatore allo scopo di preservare al massimo le componenti ad alta frequenza dell'impulso fornito dal contatore stesso ⁽¹⁾.

Un circuito d'ingresso a «cathode follower» offrendo una minima capacità di entrata è la soluzione a questa seconda esigenza specialmente se, a costo di una sensibile complicazione dovuta alla alimentazione separata, si introduce il «cathode follower» immediatamente dopo il contatore. In tal modo la capacità del cavo di collegamento ai successivi circuiti non risulta più in parallelo con il contatore stesso.

L'adozione di un «cathode follower» d'ingresso è in contrasto però con l'applicazione dei tradizionali multivibratori con i quali tuttavia nemmeno si realizza la prima delle condizioni sopra enunciate. Infatti gli impulsi gene-

⁽¹⁾ I. F. QUERCIA e B. RISPOLI: *Nuovo Cimento*, 6, 63 (1949).

rati da un multivibratore seguito da un circuito di derivazione non sono in diretta relazione con l'inizio della scarica del contatore perchè il multivibratore non agisce finchè la tensione d'entrata sta sotto una certa soglia.

Volendo egualmente far uso di un multivibratore d'ingresso, è consigliabile lasciare a questo il solo compito di spegnere il contatore disponendo in modo indipendente per la formazione degli impulsi.

Nella soluzione qui adottata si usa uno speciale multivibratore atto a spegnere il contatore e presentante inoltre, per piccoli segnali, le proprietà di un « cathode follower ».

Tale unità, costituita da due valvole e posta in una scatola metallica innestata direttamente sul contatore, verrà descritta particolareggiatamente in seguito.

Seguendo il cammino del segnale, che esce a bassa impedenza da questa unità, si giunge mediante cavo schermato al circuito formatore di impulsi

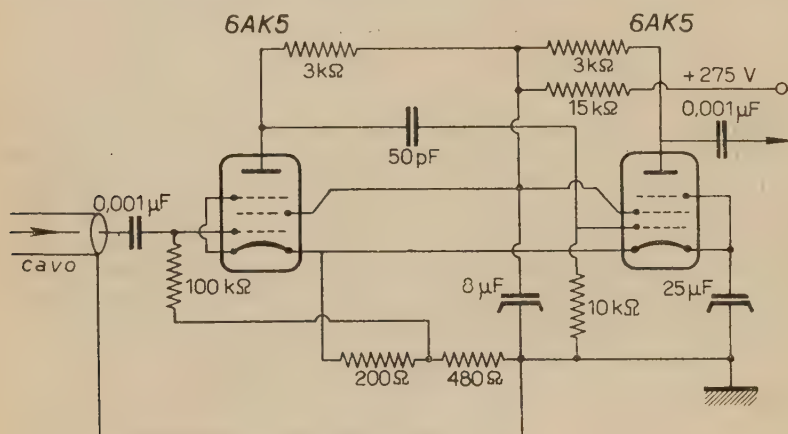


Fig. 1. - Amplificatore formatore di impulsi.

costituito da due pentodi 6AK5 (fig. 1). Il primo di questi pentodi è polarizzato in modo che vengano amplificati i segnali (negativi) non superanti i due volt, mentre valori superiori provocano l'interdizione.

Segue un circuito d'accoppiamento a resistenza capacità la cui costante di tempo inferiore al microsecondo determina la durata degli impulsi trasmessi.

Il secondo pentodo è polarizzato oltre l'interdizione e amplifica solo le creste di questi segnali fornendo in placca impulsi negativi esenti da indesiderabili « code ». Questi impulsi di 40 V circa, sono direttamente inviati alle coincidenze. Si è usato qui il circuito detto « New Rossi » con doppi triodi 6SL7 facendo prima coincidenze doppie, poi combinando due doppie tra loro per avere le quadruple ed infine due quadruple fra di loro per avere le quintuple e le sestuple ⁽²⁾; ciò allo scopo di evitare sfasamenti.

Occorrono 9 unità identiche collegate tra di loro con accoppiamento diretto. Lo schema di queste unità è dato in fig. 2: unico particolare degno di nota,

⁽²⁾ La sestupla 1, 2, 3, 4, 5, 6, è ottenuta facendo coincidere le due quadruple 1, 2, 3, 4 e 1, 2, 5, 6.

il doppio commutatore a tre posizioni che permette di ottenere la coincidenza tra due canali oppure di trasmettere i segnali dell'uno o dell'altro canale. In tal caso la valvola corrispondente funziona semplicemente da « cathode follower ».

Con le costanti indicate nelle diverse figure il potere separatore, misurato

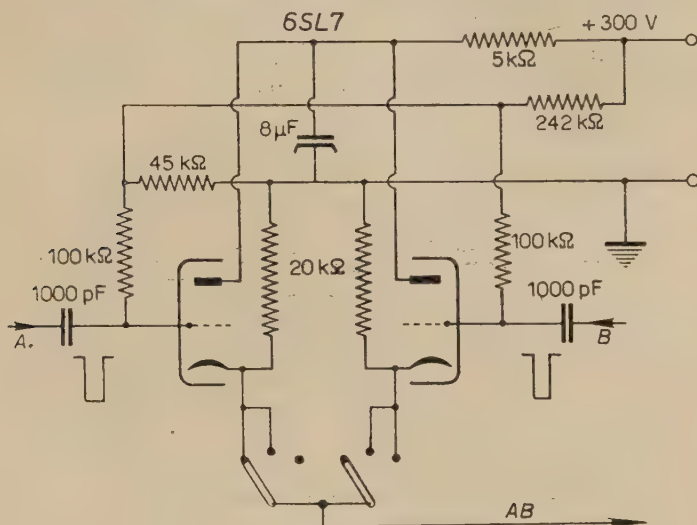


Fig. 2. — Unità di coincidenza.

al sincroscopio, è risultato di $0,85 \mu\text{s}$ per le doppie e di circa $1 \mu\text{s}$ per le sestuple.

Multivibratore catodico d'ingresso.

Lo schema di principio è rappresentato in fig. 3.

La resistenza R_1 nel circuito di placca della valvola V_1 (un triodo ad alto μ) fa anche da resistenza zavorra al contatore perchè il filo del contatore è direttamente collegato alla placca P_1 . Il condensatore C costituisce l'accoppiamento alla seconda valvola V_2 che è un triodo ad elevata conduttanza mutua funzionante come «cathode follower». La caratteristica del circuito sta nel secondo accoppiamento tra le due valvole (necessario per il funzionamento a multivibratore) ottenuto collegando insieme i due catodi. Inoltre, in condizioni di riposo, la griglia del triodo V_1 è mantenuta negativa rispetto al catodo in modo appena sufficiente per l'interdizione. L'impulso negativo proveniente dal contatore, trasmesso a G_2 attraverso la capacità C , provoca inizialmente un abbassamento del potenziale dei catodi che riproduce fedelmente (a parte il cambiamento d'impedenza) la variazione del potenziale di G_2 . Tale segnale prelevato al catodo è inviato agli stadi successivi. Abbassandosi ancora il potenziale dei catodi e rimanendo fisso il potenziale di G_1 (ottenuto dal poten-

metro R) si riduce a zero la polarizzazione negativa che interdice V_1 ⁽³⁾. Si forma così, per effetto del collegamento tra i due catodi, un anello reattivo che parte da G_2 e giunge a P_1 (attraverso V_1 che ora conduce) chiudendosi nuovamente su G_2 mediante il condensatore C .

Questa reazione porta rapidamente il circuito in una condizione quasi stabile in cui la differenza di potenziale tra placca e catodo di V_1 si riduce a poche decine di volt. G_2 assume allora un valore negativo tale da interdire praticamente V_2 con la conseguenza che la differenza di potenziale ai capi della resistenza catodica R_2 si riduce da 200 volt a qualche decina.

Il potenziale del filo del contatore viene perciò ad abbassarsi (per queste

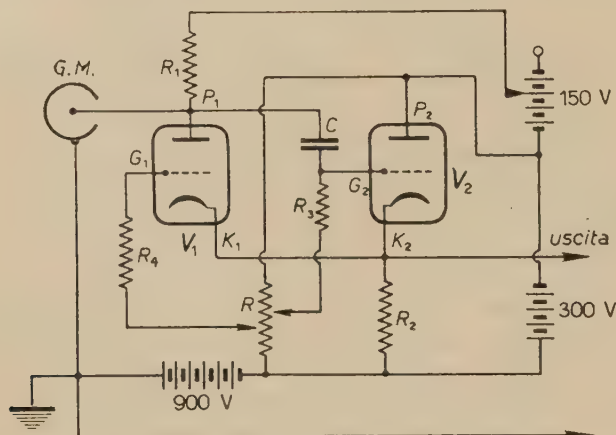


Fig. 3. — Schema di principio del multivibratore.

due cause agenti nello stesso senso) di $300 \div 350$ volt sufficienti per estinguere la scarica nel contatore stesso.

Queste condizioni permangono per un brevissimo tempo necessario per la scarica di C attraverso la resistenza di fuga R_3 (qualche μs) quindi, appena V_2 non è più interdetta, l'anello reattivo riprende a funzionare in senso inverso riportando K_1 e K_2 alla posizione stabile di riposo. Di conseguenza la valvola V_1 torna ad essere interdetta ed il potenziale della placca P_1 risale esponenzialmente al valore di regime.

Lo schema definitivo dell'unità, realizzata utilizzando le valvole miniatura 6AT6 e 6BA6, è dato in fig. 4. Si noterà che l'uscita non è prelevata al catodo, bensì alla placca del diodo della 6AT6. Questo collegamento per la bassa resistenza interna del diodo non disturba la trasmissione di segnali negativi mentre taglia efficacemente il guizzo positivo di tensione che si ha quando il multivibratore torna alla posizione di riposo. La costante di tempo $R_5 C_2$

⁽³⁾ Dal momento in cui K_1 assume un potenziale inferiore a G_1 si ha corrente di griglia; la elevata resistenza R_4 , limitando questa corrente, permette a G_1 di seguire il potenziale di K_1 durante le sue escursioni negative senza imporre un carico eccessivo al «cathode follower». Analogo ragionamento può applicarsi alla placca P_1 ed alla resistenza R_1 da $1 M\Omega$.

(C_2 capacità del cavo) deve essere notevolmente più corta del tempo morto del multivibratore.

Un altro particolare interessante sta nel collegamento controelettivo del condensatore C_1 grazie al quale vengono soddisfatte due esigenze nettamente opposte. Infatti per effetto di C_1 il valore dinamico della resistenza R_3 viene aumentato a circa 10 volte il valore statico. Ciò permette di mantenere abbastanza basso (0,2 M Ω) il valore statico di R_3 senza che diminuisca sensibil-

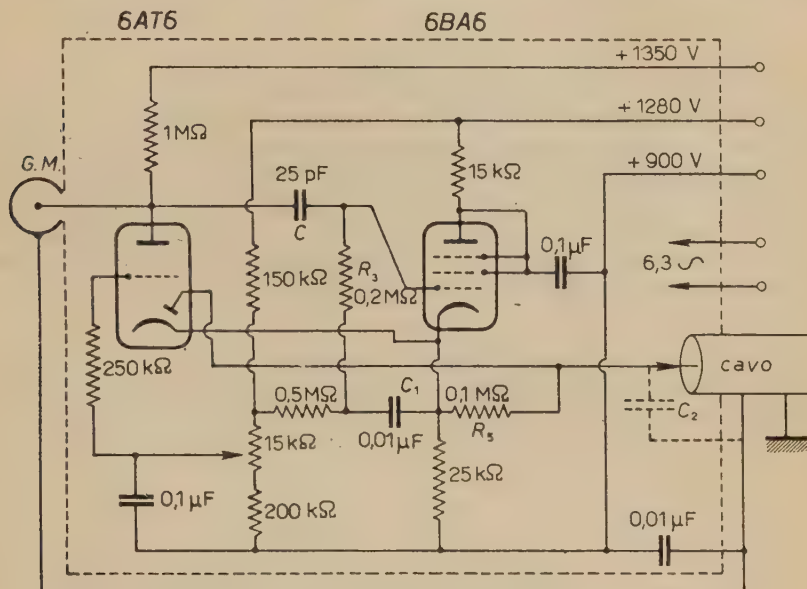


Fig. 4. - Multivibratore catodico d'ingresso. Schema definitivo.

mente l'ampiezza del segnale trasmesso alla griglia della 6BA6 dalla capacità C . Quando invece la 6BA6 si trova all'interdizione la R_3 non viene più dinamicamente aumentata e quindi la costante di tempo R_3C è breve e tale da facilitare il rapido ritorno del multivibratore alla posizione di equilibrio.

Per la seconda valvola, quella che fa da «cathode follower», si è scelto il pentodo a pendenza variabile 6BA6 collegato come triodo. La caratteristica a pendenza variabile non disturba il funzionamento a «cathode follower», data la piccola ampiezza della parte utile dei segnali trasmessi, ed è vantaggiosa invece nell'accelerare il ritorno del multivibratore alla posizione d'equilibrio.

Nella costruzione si è seguito il criterio di realizzare tutte le parti del complesso come unità separate in modo che multivibratore, formatore d'impulsi, unità di coincidenze, unità di numerazione, potessero essere in poco tempo sostituiti in caso di guasto. L'alimentazione è fatta con due raddrizzatori a 300 volt oltre il raddrizzatore ad alta tensione per i contatori: tutti sono convenientemente stabilizzati.

È mio dovere ringraziare qui l'ing. GIOVANNI BERTOLINO per il valido

aiuto dato, prima nella elaborazione dei vari circuiti, e poi nella realizzazione pratica e nella successiva messa a punto.

Ringrazio il prof. GLEB WATAGHIN per aver ispirato questo lavoro e per avermi aiutato con utili consigli e discussioni.

SUMMARY

A six channel coincidence circuit with a resolving power of less than one micro-second has been studied and used in researches on penetrating showers. Each channel has a cathode-coupled input multivibrator unit for counter quenching. One of the two tubes of this unit also acts as a cathode follower and gives a low impedance output. Each multivibrator unit is coupled directly to the G.M. counters so that input parasitic capacity is reduced to a minimum and thus an improved transmission of high frequency components of the pulse is obtained.

LETTERE ALLA REDAZIONE

La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Sulla relazione di indeterminazione.

L. CASTOLDI

Istituto di Fisica dell'Università - Genova

(ricevuto il 1° Novembre 1950)

La lettura di una interessante recente lettera di A. GAMBA ⁽¹⁾, recante lo stesso titolo, mi induce a proporre un procedimento deduttivo della relazione in parola — nella formulazione generale attribuita da SCHRÖDINGER — che ritengo rapidissimo e non privo di eleganza.

Sia

$$(1) \quad \mathcal{L} = \mathcal{H} + i\mathcal{H}'$$

la scomposizione (notoriamente univoca e sempre possibile) di un operatore lineare \mathcal{L} nelle sue parti hermitiana ed antihermitiana.

Dalla corrispondente relazione tra i valori medi relativi a un generico stato ψ

$$(2) \quad \overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{H}} + i\overline{\mathcal{H}'},$$

avendo presente la realtà di $\overline{\mathcal{H}}$ e $\overline{\mathcal{H}'}$, trae subito

$$(3) \quad |\overline{\mathcal{L}}|^2 = (\overline{\mathcal{H}})^2 + (\overline{\mathcal{H}'})^2.$$

Ciò si applica al caso che sia

$$(4) \quad \mathcal{L} = \mathcal{A}\mathcal{B},$$

con \mathcal{A} e \mathcal{B} operatori hermitiani. In tal caso è

$$(5) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A}) ; \quad \mathcal{H}' = \frac{1}{2i}(\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}),$$

e da (3), con (4) e (5), risulta

$$(6) \quad |\overline{\mathcal{A}\mathcal{B}}|^2 = \frac{1}{4}\{(\overline{\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A}})^2 + |\overline{\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}}|^2\}.$$

⁽¹⁾ A. GAMBA: *Nuovo Cimento*, **7**, 378 (1950).

D'altra parte, una nota disuguaglianza di SCHWARZ, applicata alle funzioni $A\psi$ e $B\psi$, porge

$$(7) \quad |\overline{AB}^2| \leq \overline{A^2} \cdot \overline{B^2},$$

da cui segue, in virtù di (6):

$$(8) \quad \overline{A^2} \cdot \overline{B^2} \geq \frac{1}{4} \{ (\overline{AB + BA})^2 + |\overline{AB - BA}|^2 \}.$$

Se si assume, con \mathcal{F} e \mathcal{G} hermitiani:

$$(9) \quad \mathcal{A} = \mathcal{F} - \overline{\mathcal{F}} = \Delta\mathcal{F}; \quad \mathcal{B} = \mathcal{G} - \overline{\mathcal{G}} = \Delta\mathcal{G},$$

la (8) fornisce subito la richiesta relazione di indeterminazione

$$(10) \quad (\overline{\Delta\mathcal{F}})^2 \cdot (\overline{\Delta\mathcal{G}})^2 \geq \left(\frac{\overline{AB + BA}}{2} \quad \overline{AB} \right)^2 + \left| \frac{\overline{AB - BA}}{2} \right|^2.$$

La presente deduzione consente di precisare gli eventuali stati per cui nella (10) si verifica l'uguaglianza dei due membri. Infatti, la richiamata relazione di SCHWARZ sussiste come uguaglianza, allorchè è

$$(11) \quad B\psi = cA\psi,$$

con c costante complessa qualunque; e soltanto allora. Ciò significa che gli stati richiesti sono tutte e sole le soluzioni regolari, normalizzate e soddisfacenti eventuali condizioni al contorno, dell'equazione operativa con parametro c :

$$(12) \quad (\mathcal{G} - c\mathcal{F})\psi = (\overline{\mathcal{G}} - c\overline{\mathcal{F}})\psi.$$

Tra queste soluzioni, supposto che ne esistano, si possono ricercare quelle che rendono minimo il secondo membro di (10), ottenendo eventuali stati che potrebbero chiamarsi « di precisione massima per la contemporanea conoscenza delle osservabili F e G ».

Il problema, posto così in generale, non si presenta di facile soluzione. Esso si risolve peraltro in modo ben noto ⁽²⁾ nel caso semplicissimo di una particella libera mobile in una dimensione, allorchè F e G si identificano rispettivamente con l'ascissa e col corrispondente momento.

(²) W. HEISENBERG: *I principi fisici della teoria dei quanti* (traduzione di M. AGENO). (Torino, 1948), pp. 23-31.

Sulla produzione di mesoni π di bassa energia negli urti nucleari.

N. DALLAPORTA e M. MERLIN

Istituto di Fisica dell'Università di Padova, Centro del C.N.R. per gli ioni veloci

(ricevuto il 5 Novembre 1950)

Recenti studi della scuola di Bristol mediante lastre nucleari portate ad alta quota ⁽¹⁾ hanno permesso di determinare una parte notevole dello spettro energetico dei mesoni π generati in un urto nucleare (vedi fig. 4 del lavoro citato). Una parte di tale spettro (per energie dei mesoni $>$ di ~ 100 MeV), determinato usando il metodo dello scattering multiplo combinato col conteggio dei grani, presenta un andamento decrescente coll'energia, in un primo tratto ($\sim 100 \text{ MeV} < E < \sim 1400 \text{ MeV}$) secondo la potenza $E^{-3/2}$ e in un secondo tratto ($E > 1400 \text{ MeV}$) secondo la potenza $E^{-5/2}$, in buon accordo coi risultati di SANDS ⁽²⁾. Vi è inoltre per le bassissime energie dei mesoni (1,6 MeV) un altro punto isolato, ottenuto mediante i mesoni σ in fine range che producono stelle secondarie nell'emulsione. Tra queste due regioni vi è una lacuna per la quale non vi sono dati diretti. Ora appare assai improbabile che tale lacuna possa essere reale, mentre si spiega assai bene in modo strumentale, in quanto mesoni nell'intervallo energetico tra i ~ 10 e i ~ 100 MeV sono troppo poco energici per poter applicare ad essi il metodo delle sagitte, e, troppo energici per essere distinguibili ad occhio dai protoni.

Ci sembra che una indicazione sull'andamento dello spettro in questa zona di lacuna — molto desiderabile ai fini teorici — si possa facilmente avere dal confronto con una delle prime esperienze di POWELL e coll. ⁽³⁾ che avevano esposto sulla Jungfrau un pacco di lastre verticali con e senza schermo di Pb laterale, ed osservavano nei due casi la produzione di mesoni σ in funzione dell'angolo θ di entrata nelle lastre. I mesoni osservati si devono pensare generati:

nel secondo caso (assenza di Pb): a) nel vetro stesso delle lastre, b) nell'ambiente circostante;

nel primo caso (con schermo di Pb): a') nel vetro delle lastre (contributo uguale a quello del caso precedente), b') nell'ambiente circostante (tale contributo sarà ora diminuito per l'assorbimento in Pb), c') nello schermo di Pb stesso.

Ora, considerando la curva differenza delle due precedenti (curva C nella fig. 4 di POWELL e coll. ⁽³⁾), i due contributi a) e a') si elidono e la differenza tra i due contributi b) e b') si può considerare trascurabile di fronte al contributo c'); ne

⁽¹⁾ U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK e H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1950).

⁽²⁾ M. SANDS: *Phys. Rev.* **77**, 180, (1950).

⁽³⁾ U. CAMERINI, H. MUIRHEAD, C. F. POWELL e D. M. RITSON: *Nature*, **162**, 433 (1948).

segue che tale curva deve rappresentare abbastanza esattamente il numero di mesoni σ generati nel solo Pb. Ora tali mesoni non possono essere nè di bassissima energia in quanto verrebbero assorbiti prima di giungere alle lastre, nè di energia >200 MeV in quanto la produzione di fasci di mesoni di alta energia è fortemente direzionale e poco si scosta dalla direzione dei primari: e questi avendo in tale caso provenienza verticale, non ci si può aspettare di ottenere mesoni energici a 90 gradi. Per interpretare quindi le esperienze della Jungfrau, occorre postulare una produzione di mesoni di energia <100 MeV negli urti nucleari pressochè isotropa, e la misura dell'intensità di questi mesoni laterali osservati deve permettere di risalire in modo grossolano all'andamento dello spettro di produzione proprio nella zona di lacuna delle curve di Bristol.

In questa nota ci siamo proposti di effettuare tale confronto calcolando, a partire dallo spettro energetico dei mesoni di Bristol, debitamente completato per le basse energie, l'intensità dei mesoni che ci si deve attendere sulle lastre dell'esperienza della Jungfrau. Tale confronto sembra reso possibile dal fatto che nei due lavori viene dato il valore assoluto del numero dei mesoni osservati. Le curve di Bristol infatti si possono normalizzare al numero assoluto di mesoni per MeV per stella (moltiplicandole per $2,5 \cdot 10^{-5}$); e le due esperienze essendo poi fatte a quote diverse (rispettivamente 25 000 m e 3 500 m), si può in prima approssimazione (pensando cioè che il taglio dovuto al campo magnetico terrestre in alta quota sia compensato, ai fini della produzione dei mesoni, dalla decrescenza della sezione d'urto di produzione per le basse energie) ammettere che la forma dello spettro dei mesoni rimanga la stessa e ottenere il numero di mesoni alla quota dell'esperienza della Jungfrau normalizzando col numero assoluto di stelle a tale quota (14,2 per cm^3 per giorno).

Sia dunque $\sigma(E_0, E)$ la sezione d'urto per produzione di mesoni di energia E in un urto nucleare da parte di un primario di energia E_0 . Se $f(E_0)$ rappresenta lo spettro della componente primaria, v il numero di centri per cm^3 , avremo per il numero di mesoni di energia E generati nell'elemento di volume dv_1 ,

$$(1) \quad S(E) dE dv_1 = dv_1 dE v \int_E^{\infty} f(E_0) \sigma(E_0 E) dE_0.$$

Questi mesoni di energia E avranno un range R legato ad E da una relazione

$$2) \quad E = (kR)^m.$$

dove k ed m sono costanti che variano da mezzo a mezzo. Il numero di mesoni che verrà a morire dando una stella secondaria in un elemento di volume $dv = R^2 dR \sin \theta d\theta d\varphi$ a distanza R da dv_1 , sarà dato da:

$$(3) \quad S(E) dE dv_1 \frac{R^2 dR \tau(\theta) \sin \theta}{4\pi R^2 dR} d\theta d\varphi = S(E) dE dv \frac{\tau(\theta) \sin \theta}{4\pi} d\theta d\varphi.$$

essendo in genere $\tau(\theta)$ una funzione dell'angolo θ tra la direzione della congiungente dv_1 con dv e la direzione della primaria incidente verticale.

Nel caso in cui vi sia assorbimento sia della primaria sia dei mesoni secondari, dovremo moltiplicare questa espressione per due esponenziali $\exp[-\alpha Z] \exp[-R/\lambda]$ (con α coefficiente di assorbimento della primaria $\approx 0,038$ nel Pb, e λ cammino libero medio dei mesoni per il quale, in mancanza di dati diretti relativi ai mesoni

lenti, assumeremo il valore sperimentale di 90 g/cm^2 ottenuto a Bristol per mesoni energetici), ottenendo per il numero totale di mesoni che finiranno nell'elemento $d\nu$ l'espressione:

$$(4) \quad d\nu \iint I(\theta) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = d\nu F(E) \int \int \frac{\tau(\theta) \sin \theta}{4\pi} \, d\theta \, d\varphi$$

nella quale

$$F(E) = \int \exp[-\alpha Z] S(E) \exp[-R/\lambda] \, dE,$$

ovvero differenziando la (2)

$$(5) \quad F(E) = mk^m \int \exp[-\alpha Z] S(E) \exp[-R/\lambda] R^{m-1} \, dR,$$

con E funzione di R tramite la (2). Gli integrali vanno estesi a tutto il volume nel quale i mesoni vengono generati.

Per potere applicare queste formole al nostro problema, sulla base dei dati sperimentali abbiamo assunto per la $S(E)$:

$$(6) \quad \begin{cases} E < E_l & S(E) = B \\ E > E_l & S(E) = \frac{A}{E^{3/2}}, \end{cases}$$

dove E_l è una energia limite tra le alte e le basse energie, che abbiamo fissata $\underline{\underline{70 \text{ MeV}}}$, come risulta dalla fig. 4 di (1); mentre A e B sono due costanti legate tra loro dalla relazione di raccordo $A = BE_l^{3/2}$; B dovrà essere dell'ordine di ~ 100 nelle unità arbitrarie adoperate nel diagramma 4 di (1). Data, come vedremo, la scarsa importanza del contributo delle alte energie per il nostro caso, abbiamo assunto per tutto l'intervallo con $E > E_l$ la dipendenza in $E^{-3/2}$, il che ci dovrà dare un limite superiore per tale contributo.

Per quanto riguarda la dipendenza angolare dei mesoni prodotti, schematizzeremo il problema ammettendo che per basse energie, essa sia isotropa e che quindi

$$\text{per } E < E_l \quad \tau(\theta) = 1,$$

mentre per alte energie, ci serviremo dei dati sperimentali di COSYNS (4) sugli sciame di mesoni relativistici, che si possono compendiare in modo soddisfacente nella relazione analitica:

$$\text{per } E > E_l \quad \begin{cases} \tau(\theta) = C_1 + C_2 \cos^2 \theta & \text{per } 0 < \theta < 90^\circ \\ \tau(\theta) = C_1 & \text{per } 90^\circ < \theta < 180^\circ, \end{cases}$$

con

$$C_1 = 0,022, \quad C_2 = 0,978.$$

Ci restano ora da precisare solamente le condizioni geometriche del dispositivo della Jungfrau, costituito come abbiamo detto da un pacco di lastre rettangolari ($5 \times 10 \text{ cm}$) verticali. Faremo il calcolo per il punto centrale di una delle lastre

(4) M. G. E. COSYNS: *Bulletin du Centre de Physique nucléaire de l'Université de Bruxelles*, n. 18 (1950).

del pacco. La maggiore incertezza nella schematizzazione geometrica sta nel decidere quale debba essere l'angolo azimutale di incidenza limite φ_l dei mesoni che terminano nella lastra, per valori maggiori del quale sia presumibile che i mesoni corrispondenti non possano più essere riconosciuti come tali nell'osservazione, e quindi non vengano più registrati nel conteggio. Alquanto arbitrariamente, basandoci sulla comune esperienza degli osservatori e tenendo conto della contrazione dello spessore dopo lo sviluppo, abbiamo assunto $\varphi_l = 45^\circ$. Quando il calcolo viene condotto per le lastre circondate dal Pb, occorre inoltre tenere conto del diverso frenamento dei mesoni nei due mezzi Pb e vetro mediante due diverse relazioni range-energia, ($k = 58,1$, $m = 0,515$ per il vetro, $k = 33,8$, $m = 0,618$ per il Pb, quando R è espresso in g/cm^2 e E in MeV), che conducono a spezzare l'integrale (5) in due pezzi. I risultati ottenuti, si possono compendiare nella tabella seguente:

	Contri- buto B	Contri- buto A	$F(E)$ totale	$BI(\theta)$ calc.	$I(\theta)$ sper.	B	B/B_{Br}
a 90°	23,18	2,06	25,2	$11,2 \cdot 10^{-4}$	0,08	142	2
integrale da 60° a 120°	—	—	24,37	$10,8 \cdot 10^{-4}$	0,052	96	1,33

Nella prima riga figurano i dati relativi all'intensità dei mesoni emessi a 90° rispetto alla direzione incidente, nella seconda quelli relativi all'intensità integrale dei mesoni emessi tra $\theta = 60^\circ$ e $\theta = 120^\circ$; nella prima colonna figura il pezzo del fattore $F(E)$ relativo ai mesoni di bassa energia ($E < E_t$), nella seconda, quello relativo ai mesoni di alta energia ($E > E_t$), nella terza il fattore $F(E)$ intero, nella quarta l'intensità totale calcolata mediante la (4) a meno del fattore B , nella quinta l'intensità sperimentale ricavata dalle misure della Jungfrau; nella sesta i valori del fattore B (moltiplicato per 2 per tenere conto del fatto che si osservano solo i mesoni negativi) che si deducono dal rapporto delle due colonne precedenti, espresso nelle unità arbitrarie usate dalla scuola di Bristol nella fig. 4 del citato lavoro, nella settima il rapporto B/B_{Br} tra i valori di B ricavati e il valore B_{Br} quale risulta dal diagramma di Bristol ($B_{\text{Br}} \approx 70$).

Queste determinazioni conducono ad un ordine di grandezza del fattore B in buon accordo con quello di Bristol. Anzi, osservando che i mesoni nelle esperienze di Bristol sono generati in prevalenza nei nuclei di Ag e Br dell'emulsione, mentre quelli dell'esperienza della Jungfrau sono generati in Pb, vi è da attendersi un valore superiore del B dei secondi, come in fatto avviene. Ammettendo che le sezioni d'urto per la generazione di mesoni in urti nucleari in vari nuclei siano proporzionali ad $A^{2/3}$, si trova nel nostro caso $\sigma_{\text{Pb}}/\sigma_{\text{Ag}} = A_{\text{Pb}}^{2/3}/A_{\text{Ag}}^{2/3} = 1,72$, il che è in accordo coi rapporti ricavati nell'ultima colonna, tenuto conto della difficile geometria dell'esperienza che rende inevitabili schematizzazioni molto grossolane nel calcolo.

Ci è grato ringraziare il prof. G. PUPPI per alcune utili discussioni e il dott. D. CADORIN per averci aiutato nell'esecuzione dei calcoli numerici.

INFORMAZIONI

Sur les lois générales de la diffraction (*).

G. TORALDO DI FRANCA

Istituto di Fisica dell'Università - Firenze

(ricevuto il 28 Settembre 1950)

Introduction.

Ce rapport fait suite à celui sur le même sujet [1], qui fut présenté à la C.I.O. à la réunion de Delft en Juillet 1948 ⁽¹⁾. Nous concentrerons surtout l'attention sur les travaux qui ont paru après cette date.

Cette limitation chronologique a permis de donner à R_2 un caractère un peu différent de celui de R_1 . Il ne s'agit plus de donner un aperçu sommaire de l'évolution de la diffraction depuis FRESNEL jusqu'à présent, mais, au contraire, d'examiner les contributions les plus fécondes qui ont paru pendant une courte période. Cela explique pourquoi R_2 peut se présenter sous une forme plutôt objective et complète, alors que R_1 était nécessairement le résultat d'un choix et d'une évaluation personnels et, par conséquent, discutables.

En outre, l'expérience faite avec R_1 nous a convaincu qu'il n'est pas possible de borner la recherche à l'optique appliquée. On ne peut pas obtenir une idée exacte de l'état actuel du problème de la diffraction sans examiner à la fois toutes les branches de la physique où elle se présente.

On peut se demander si la Commission Internationale d'Optique est l'organisme scientifique le plus qualifié pour résumer le travail dans ce domaine. A cette question nous croyons pouvoir répondre affirmativement. C'est dans l'optique que la diffraction a reçu son baptême par GRIMALDI et c'est dans l'optique que son étude s'est développé successivement dans l'œuvre de HUYGENS, de FRESNEL, de KIRCHHOFF et de SOMMERFELD.

D'ailleurs, les échanges de conceptions et de méthodes entre l'optique et

(*) Deuxième rapport critique, présenté et approuvé dans la réunion de Londres (Juillet 1950) de la Commission Internationale d'Optique.

(1) Nous indiquerons brièvement par R_1 le premier rapport et par R_2 le second.

les autres branches de la physique où se manifeste la diffraction deviennent toujours plus fréquents et plus importants. Quelques exemples suffiront pour s'en convaincre.

L'optique électronique est l'exemple le plus illustre, sur lequel il n'est pas nécessaire de s'arrêter. Dans le domaine des microondes, nous trouvons aujourd'hui en usage courant les miroirs, les prismes, les lentilles électromagnétiques [2], les bancs d'optique [3] et vice-versa, dans l'optique, nous avons les récepteurs rétinien, qui semblent se comporter comme des microantennes [4]. Dans l'acoustique ⁽²⁾, on peut mentionner des exemples de lentilles et de prismes de type ordinaire [6] ainsi que de type semblable à celui électromagnétique [7], et l'on parle même de microscope ultrasonore [8]. L'étude de la diffraction des rayons X est souvent effectuée au moyen d'un modèle optique [9], [10], tandis que les cellules de la cornée donnent lieu à un phénomène de diffraction analogue à ceux des rayons X dans les corps amorphes [11]. Même l'étude du scattering nucléaire a conduit à des contributions importantes pour la diffraction, comme nous le verrons à propos des méthodes variationnelles.

D'ailleurs, tout ce qui va suivre dans R_2 sera une démonstration de l'existence de ces relations et justifiera notre décision de nous occuper de la diffraction optique sans perdre de vue toutes les autres branches de la physique.

Recherches expérimentales.

En R_1 nous avons indiqué pour la diffraction un problème *a*) et un problème *b*). Le problème *a*) est celui de la détermination de l'amplitude complexe sur la surface de diffraction et, comme son étude mathématique est très difficile, il est utile de l'étudier par une voie expérimentale. En optique, la méthode la plus efficace paraît être celle du fond cohérent de ZERNIKE [12], que MARÉCHAL et NAUDIN [13] appliquent au cas du demi-plan conducteur, en trouvant un effet de bord dont l'extension ne surpasse pas quelques longueurs d'onde, d'accord avec la théorie de Sommerfeld.

Parmi les expériences exécutées avec les longueurs d'onde optiques, il faut citer celle de MAECKER [14] sur la révélation de l'onde oblique dans la réflexion d'une onde sphérique [15] et celle de HARTNAGEL et KAPPLER [16] qui reprennent l'étude de la polarisation de la lumière diffractée par une fente, avec la conclusion que l'on ne peut pas donner une loi simple et générale pour ce phénomène.

⁽²⁾ Pour tout ce qui concerne le sujet fort spécialisé de la diffraction de la lumière par les ondes ultrasonores, nous renvoyons à l'excellent livre de BERGMANN [5], avec sa bibliographie très étendue.

Il est clair que les expériences avec les microondes sont plus simples et plus précises; en outre, elles se prêtent mieux à une comparaison avec la théorie, car les écrans répondent mieux aux conditions idéales que l'on postule d'ordinaire (conductivité parfaite ⁽³⁾, planéité, épaisseur nulle). Ainsi, par exemple, HORTON et WATSON [17] ont pu réaliser une excellente vérification expérimentale de la théorie de Sommerfeld pour le demi-plan conducteur. Des expériences fondamentales sont celles de ANDREWS [18], qui démontre que le champ, au lieu d'être constant sur l'ouverture, comme dans la théorie de Kirchhoff, présente sur celle-ci la figure de diffraction la plus nette. Il est curieux que, cependant, à une certaine distance de l'écran, l'expérience donne des résultats en bon accord avec ceux de KIRCHHOFF. Une simple explication qualitative des résultats de ANDREWS est offerte par OWEN TRAUTER [19], qui remplace l'ouverture par deux simples dipôles inactifs. En accord avec la théorie de Huygens-Fresnel sont aussi les mesures de SEVERIN [20] le long de l'axe de l'ouverture circulaire.

Un autre avantage qui est offert par les microondes est celui de pouvoir placer l'écran à l'intérieur d'un guide d'onde qui, à cause des réflexions sur les parois, le transforme virtuellement en un écran infini, en éliminant ainsi l'effet des bords extérieurs. De cette façon, HONERJÄGER [21] expérimente avec des réseaux à fils, en vérifiant, entre autres, le fait prévu par la théorie ⁽⁴⁾ que, quand l'une des ondes diffractées atteint l'émergence rasante (au-delà de laquelle elle se transforme en onde évanescence), la transparence du réseau est égale à 1. Les microondes ont aussi permis de démontrer d'une façon définitive l'existence des ondes évanescences dans la diffraction [23].

Les lentilles électromagnétiques ont donné naissance au problème de la diffraction provoquée par les lames dont elles sont constituées. A ce propos, il faut citer les expériences de SCHAFFNER [24].

On peut faire aussi des études expérimentales très utiles avec la diffraction des ondes acoustiques. Nous rappellerons les travaux de HUBBARD, ZARTMAN et LARKIN [25] et de WIENER [26].

Discussions sur le principe de Huygens.

Nous avons vu dans R_1 combien de formes différentes peut acquérir le principe de Huygens. Ces formes ont été récemment l'objet d'un examen cri-

⁽³⁾ Plus précisément, c'est la condition de l'impédance caractéristique négligeable qui est mieux vérifiée pour les microondes que pour la lumière visible.

⁽⁴⁾ L'auteur ne dit pas que RAYLEIGH [22] connaissait déjà ce fait et en avait donné une explication correcte.

tique. La discussion est analogue à celle qui eut lieu dans le siècle passé sur la véritable forme analytique de l'interaction entre deux éléments de courant. Dans ce cas, la raison du désaccord était à chercher dans le fait que les éléments de courant sont une fiction mathématique, dépourvue de réalité physique. Et la même chose peut être dite des sources élémentaires de Huygens.

En tout cas, afin qu'une interprétation physique soit possible, CROZE et DARMOIS [27] posent comme condition que les formules 1) donnent les valeurs exactes de E et de H au delà de l'écran, 2) ne donnent pas d'ondes rétrogrades, 3) fassent paraître des ondes élémentaires vraiment électromagnétiques. Ils trouvent qu'à ces conditions satisfont les formules de LOVE, MACDONALD, LARMOR, BROMWICH, NOVOBATZKY (cités en R_1), SCHELKUNOFF [28], DE BROGLIE [29], FRANZ [30].

Sur le même sujet reviennent CROZE et DURAND [31] et CROZE et BOILLET [32]. Ils jugent nécessaire que les ondes élémentaires soient engendrées par des dipôles électriques et des dipôles magnétiques à la fois. Les seuls dipôles magnétiques donneraient des ondes rétrogrades.

Il sera bon de remarquer que ces considérations indiquent seulement la forme mathématique qui répond mieux à l'idée originelle de HUYGENS. Mais il n'en suit pas que l'on doive employer cette forme dans tous les cas. Nous croyons que la forme mathématique du principe de Huygens doit varier selon le problème traité. Par exemple, dans le cas de l'écran noir, il paraît que l'on doit appliquer les formules des auteurs cités ci-dessus (KOTTLER), mais il est certain que dans le cas de l'écran parfaitement conducteur on a avantage à faire usage seulement des dipôles magnétiques, qui donnent des ondes rétrogrades exactement égales aux ondes progressives. Bien plus, tandis que dans le cas de l'écran parfaitement conducteur notre affirmation peut être démontrée facilement, la diffraction par un écran noir est encore l'objet d'une discussion. Même récemment FRANZ [30] critique la validité des raisonnements de KOTTLER. Il dit que l'on a oublié que l'écran absorbe aussi l'onde diffractée ⁽⁵⁾.

D'autres études intéressantes sur le principe de Huygens sont celles de VASSEUR [36], BRODIN [37] et CAPRIOLI [38].

A chaque forme du principe de Huygens correspond une forme pour le principe de l'interférence inverse (voir R_1). Ainsi, MILES [39] traite au moyen de transformations vectorielles le cas de l'écran parfaitement conducteur, tandis que le cas de l'écran noir est étudié par DURAND [40].

⁽⁵⁾ En tout cas, nous sommes d'accord avec FRANZ sur ce que « physikalisch ist der völlig schwarze Schirm überhaupt keine Idealisierung, sondern eine grobe Näherung ». Il est probable que l'écran noir le plus mince qui ait une véritable signification physique soit celui indiqué par SCHELKUNOFF [33], ayant l'épaisseur $\lambda/4$. Cela est confirmé par une recherche détaillée de MALOV [34]. Pour un écran épais, la comparaison entre le corps noir et le conducteur parfait a été faite par ARTMANN [35].

Conditions d'unicité, singularités, effet de bord.

Dans la diffraction scalaire, l'unicité de la solution est assurée par les conditions de limitation et de radiation de SOMMERFELD (voir R_1). ATKINSON [41] les remplace par la seule condition :

$$r \exp [ikr] [(ik - 1/r)u - \partial u / \partial r] \rightarrow 0,$$

dont il démontre la suffisance. TICHONOV et SAMARSKIY [42] étudient la condition de radiation dans le cas général d'un domaine quelconque avec des conditions initiales de Cauchy.

Dans le cas électromagnétique, on a la complication des singularités qui prennent naissance aux bords de l'ouverture. La chose fut signalée par BOUWKAMP [43], qui démontra que, dans le cas de Sommerfeld, ou bien le champ électrique ou bien le champ magnétique deviennent infinis au bord du demi-plan (ce fait ayant échappé même à SOMMERFELD). Si nous indiquons avec s la distance du bord, la singularité est de l'ordre de $s^{-1/2}$ et ne donne pas de radiation, comme on le prouve en intégrant le vecteur de Poynting. En général, lorsqu'on déduit une solution au moyen de différentiations (comme dans le cas où l'on fait usage du vecteur de Hertz), on peut avoir des singularités d'un ordre plus élevé qui correspondraient à une distribution de sources qui n'existent pas physiquement. De telles solutions, dont on a des exemples même récents [44], ne peuvent pas être acceptées.

MEIXNER [45] remplace la condition de Bouwkamp par celle de l'énergie intégrable. MAUE [46] traite le cas plus général où l'obstacle conducteur parfait présente une arête avec l'angle dièdre θ . La densité superficielle du courant électrique perpendiculaire à l'arête reste finie, tandis que celle parallèle à l'arête est infinie, d'un ordre non supérieur à $s^{-(\pi-\theta)/(2\pi-\theta)}$. Pour $\theta = 0$, on obtient le cas de Bouwkamp. Le champ au voisinage d'une arête a été étudié aussi par BRAUNBECK [47].

DUFFIEUX [48] ne croit pas à la réalité physique de la limitation d'une pupille au moyen d'une discontinuité. Il admet plutôt l'existence d'une zone de passage graduel, qui amènerait une altération de l'effet de bord. Nous avons exprimé notre désaccord sur ce point [49].

Sur l'effet de bord, on connaît le principe de stationnarité de RUBINOVICZ [50]. KOSSEL [51] montre que ce principe permet d'expliquer aisément les propriétés de convergence du réseau circulaire avec les rayons distribués au hasard ⁽⁶⁾. BRAUNBECK [53], qui développe une théorie quantitative de

(6) En ce qui concerne les expériences, KOSSEL ne connaît pas celles de RONCHI [52], qui sont identiques aux siennes.

ce phénomène, ne tient pas compte des fluctuations statistiques, en faisant ainsi une erreur déjà signalée par RAYLEIGH [54] dans un cas analogue. Les formules valables pour tous les cas de diffraction au hasard ont été données par l'auteur de ce rapport [11].

Solutions rigoureuses.

Le domaine des solutions rigoureuses classiques (demi-plan, coin, fente) a été récemment étendu par SCHWINGER (dont le travail n'est pas publié). Il a fait remarquer que les problèmes de diffraction par une série de demi-plans (ou de cylindres) parfaitement conducteurs peuvent être amenés à une équation intégrale de WIENER-HOPF [55] que l'on sait résoudre. Ce problème a été traité par CARLSON et HEINS [56] et, indépendamment, par WAINSTEIN [57]. Le cas acoustique a été résolu par MILES [59]. Toujours dans la même ligne est la solution exacte donnée par LEVINE et SCHWINGER [59] pour le rayonnement acoustique d'un tuyau cylindrique.

Beaucoup d'attention a reçu la diffraction par un trou circulaire dans un écran plan, conducteur parfait. Le problème scalaire a été résolu par plusieurs auteurs au moyen des coordonnées sphéroïdales. Après le travail fondamental de BOUWKAMP [60], il faut rappeler ceux de STORRUSTE et WERGELAND [61], de SPENCE [62], de LEITNER [63], de WIENER [64], de STENZEL [65]. La diffraction acoustique par un demi-plan est traitée par J. BRILLUIN [66] en coordonnées paraboliques.

Dans le domaine électromagnétique, la diffraction par un trou circulaire a été traitée par MEIXNER [45]. Sa méthode est correcte en ce qui concerne les singularités au bord (énergie intégrable). Cependant, BOUWKAMP [67] croit que cette solution peut présenter une singularité au centre du trou: dans ce cas, elle ne serait pas acceptable.

La diffraction par un paraboloïde de rotation fini ou infini a été étudié par MIRIMANOV [68] dans une série de travaux.

Méthodes approchées.

A cause de la complication offerte par la solution rigoureuse des problèmes de diffraction, il est utile de connaître des formules approchées.

Un intéressant procédé par approximations successives a été proposé par FRANZ [69]. Comme première approximation, on peut choisir celle de l'optique géométrique, qui satisfait les conditions aux limites mais ne satisfait pas l'équation des ondes; la deuxième approximation sera celle de KIRCHHOFF,

qui respecte l'équation des ondes, sans respecter les conditions aux limites; une troisième approximation sera d'accord avec les conditions aux limites, mais pas avec l'équation des ondes, etc....

Une autre méthode est due à BOUWKAMP [70] qui, dans le cas du trou circulaire de rayon r , résout l'équation intégral-différentielle du problème moyennant une série de puissances de kr . Les intégrales nécessaires pour ce développement sont évaluées dans un travail à part [71].

Des études dignes d'une grande attention sont celles de l'école russe sur les formes approchées des conditions aux limites. LEONTOWIČ [72] a proposé des conditions approchées à la surface S d'un corps conducteur (non parfait) ⁽⁷⁾. Une démonstration générale de ces conditions a été donnée par PANYČ [73]. Si k_e et k_i sont les constantes de propagation à l'extérieur et à l'intérieur du corps, α_1 , α_2 les courbures principales de S et l , m les lignes de courbure, nous aurons sur S les conditions suivantes (approchées jusqu'au deuxième ordre en $1/k_i$):

$$E = -\frac{k_e \mu}{k_i} \left(1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{rik_i} \right) H_m,$$

$$E_m = \frac{k_e \mu}{k_i} \left(1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{rik_i} \right) H_l,$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial n} + (\alpha_1 + \alpha_2) E_n = -\frac{ik_e^2 \mu}{k_i} \left(1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{rik_i} \right) E_n,$$

n étant la normale de S . Ces conditions permettent de donner la solution à l'extérieur du corps, sans connaître celle à l'intérieur.

Une théorie analogue est celle du champ local de FOCK [74]. Le passage de la zone éclairée à l'ombre sur la surface de l'obstacle n'est pas brusque, comme le voudrait l'optique géométrique. Il y a, au contraire, une zone de pénombre qui a grande influence sur le phénomène de diffraction. Si R est le rayon de courbure de la section de S avec le plan d'incidence, la pénombre a une largeur de l'ordre de $d = (\lambda R^2/\pi)^{1/3}$.

Le champ dans la pénombre est une fonction universelle que FOCK a calculée et tabulée.

Des expressions approchées pour le champ dans le problème de Sommerfeld sont données par HORTON [75]; elles ont un domaine de validité plus étendu que celles qui étaient déjà connues.

(7) Nous n'avons pas pu voir le travail original de LEONTOWIČ, mais son contenu est exposé clairement dans le travail de PANYČ, cité dans la suite.

Equations intégrales et intégrro-différentielles.

Il est difficile de dire qui a réduit le premier les problèmes de diffraction à la solution d'équations intégrales ou intégrro-différentielles ⁽⁸⁾. Mais ce procédé a reçu un développement remarquable pendant les dernières années.

Nous avons déjà parlé du problème bidimensionnel. L'étude des équations intégrales qui interviennent dans ce cas a été approfondie par MILES [77].

Pour un écran plan parfaitement conducteur, la formulation intégrro-différentielle peut être donnée simplement de la façon suivante. En R_1 nous avons vu que le champ diffracté peut s'exprimer au moyen des composantes tangentielles de \mathbf{E} . Sous la forme vectorielle, on peut écrire [78]:

$$\mathbf{E}(P) = 2 \iint_S [\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}(P')] \wedge \text{grad}_{P'} \frac{\exp [ikr]}{4\pi r} dS_{P'},$$

S étant la surface de l'ouverture et \mathbf{k} sa normale dans le sens de la propagation. Le champ magnétique \mathbf{H} doit être calculé avec la seconde équation de Maxwell et, comme dans l'ouverture sa partie tangentielle est égale à celle de l'onde incidente, on obtient tout de suite l'équation intégrro-différentielle pour \mathbf{E} [79]:

$$(1) \quad i\omega\mu \mathbf{H}^i(P'') \wedge \mathbf{k} = 2\mathbf{k} \wedge \text{rot}_{P''} \iint_S [\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}(P')] \wedge \text{grad}_{P'} \frac{\exp [ikr]}{4\pi r} dS_{P'},$$

P' et P'' étant des points de S et $r = |P' - P''|$.

On a donné beaucoup d'attention aux équations intégrales de COPSON [80]. BOUWKAMP [81] a remarqué que les équations de Copson sont correctes seulement si $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ le long du bord de l'ouverture; dans le cas contraire, il faut tenir compte aussi d'une intégrale de ligne. VASSEUR [82] tient compte de cette correction dans sa solution avec des courants magnétiques ou électriques.

D'autres formulations intégrales ou intégrro-différentielles ont été étudiées récemment par FRANZ [30], MAUE [46], LEVINE et SCHWINGER [83], [84], MILES [85], SOMMERFELD [86], MIRIMANOV [44].

Il est clair que, dans le cas des réseaux, les équations intégrales dégénèrent en un nombre infini d'équations avec un nombre infini d'inconnues [87].

⁽⁸⁾ La formulation intégrro-différentielle du cas le plus général de propagation en présence de corps matériels est bien connue depuis longtemps [76].

Les méthodes variationnelles.

Une importante nouveauté des dernières années est l'introduction des méthodes variationnelles dans la diffraction. Ces méthodes ont pris naissance dans le domaine du scattering nucléaire ⁽⁹⁾, mais peu après LEVINE et SCHWINGER les ont appliquées à la diffraction proprement dite. Les méthodes variationnelles donnent une expression de la lumière diffractée, qui reste stationnaire pour de petites variations de l'amplitude complexe sur l'écran par rapport à sa valeur exacte.

LEVINE et SCHWINGER ont traité le problème scalaire en partant une fois [83] de la formule (8) de R_1 et une fois [84] de la formule (1) de R_1 . Ils parviennent à l'expression variationnelle en utilisant l'équation intégrale à laquelle doit satisfaire l'amplitude complexe sur l'ouverture. Cette amplitude complexe est représentée avec des fonctions d'approximation dont les coefficients peuvent être déterminés d'après la méthode classique de RITZ [90]. On arrive ainsi rapidement à des approximations très poussées, comme le démontre la comparaison que LEVINE et SCHWINGER font avec la solution exacte de BOUWKAMP [60] pour le trou circulaire, surtout après la correction de quelques erreurs de calcul [91], [92]. LEVINE [93] applique la même méthode au cas où l'on pose sur l'écran la condition acoustique $\partial u / \partial n = 0$, au lieu de $u = 0$. Enfin, en employant la dyade de Green, au lieu de la fonction scalaire, et en partant de l'équation (1) ou d'une équation équivalente, il a pu traiter de la même façon le cas électromagnétique ⁽¹⁰⁾.

Toujours avec la méthode variationnelle, MILES a traité les cas acoustique [94] et le cas électromagnétique [85] ⁽¹¹⁾.

Une formulation variationnelle très générale pour le cas électromagnétique a été donnée par KISUNKO [95].

Le principe de Babinet.

Plusieurs auteurs ont étudié le principe de Babinet et en ont corrigé l'ancien énoncé, de façon à lui donner une forme plus précise. Dans le champ scalaire,

⁽⁹⁾ Les méthodes variationnelles pour le calcul des valeurs propres dans les systèmes à énergie négative étaient connues dès longtemps [88], mais seulement leur application au cas du spectre continu, faite pour la première fois par HULTHÉN [89], peut intéresser pour la diffraction.

⁽¹⁰⁾ Communication personnelle. Ce travail de LEVINE va être publié bientôt.

⁽¹¹⁾ Les courbes données par MILES pour le cas du trou circulaire contiennent des erreurs que l'auteur va corriger dans un travail prochain (communication personnelle).

BOUWKAMP [60] a fait remarquer que, si l'on pose sur un écran la condition $u = 0$, sur l'écran complémentaire on devra poser: $\partial u / \partial n = 0$.

Pour la diffraction électromagnétique, la première mise au point est attribuée à BOOKER, qui est cité comme source par COPSON [80] et par WATSON [96] dans leurs présentations du principe de Babinet.

Il n'est pas nécessaire d'écrire des formules pour comprendre la substance du nouveau principe de Babinet. Il suffit de dire que, non seulement les écrans, mais aussi les conditions aux limites, doivent être complémentaires. Et cela peut s'obtenir en choisissant dans les deux cas des sources complémentaires, par exemple, engendrées respectivement par des courants électriques et par des courants magnétiques égaux.

Des énoncés équivalents sont donnés par FELD [97], MEIXNER [45], VASSEUR [82], MILES [85].

On n'a pas remarqué que LEONTOWIČ [98], indépendamment de BOOKER, avait aussi donné une expression correcte pour le principe de Babinet électromagnétique.

Sections efficaces.

On a étudié plusieurs fois au cours des dernières années les sections efficaces de transmission des ouvertures et les sections de scattering des obstacles placés sur le chemin de la lumière.

A ce sujet, plusieurs auteurs ont étudié le problème du calcul numérique des formules classiques de Mie pour les particules sphériques. Il faut rappeler SINCLAIR [99], qui a corrigé une erreur largement répandue dans la littérature et HOUGHTON et CHALKER [100], qui ont montré clairement la succession des maxima et minima de la section de scattering, qui a lieu lorsqu'on augmente le rayon de la sphère.

Il a été remarqué plusieurs fois et indépendamment [101], [102], [103], que la section de scattering, lorsque le rayon devient très grand, tend vers le double de la section géométrique. Il semble que BOHR a été le premier qui a donné une explication (d'ailleurs évidente) de ce fait avec le principe de Babinet⁽¹²⁾. La même explication est répétée par SINCLAIR [99], VAN DE HULST [104], L. BRILLOUIN [105] et d'autres.

Pour des écrans métalliques, de forme et dimension quelconques, nous avons démontré [79] que la section de scattering pour une polarisation donnée

(12) Cela est affirmé par STORRUSTE et WERGELAND [61].

est le double de la section efficace de transmission de l'ouverture complémentaire pour une polarisation perpendiculaire à la première.

Un sujet d'étude a été la relation (presque mystérieuse) existant entre la section de scattering σ et l'amplitude complexe A , diffractée dans la direction d'incidence. Dans le cas scalaire, elle s'écrit :

$$\sigma = -2\lambda \operatorname{Im} A.$$

La première démonstration que nous connaissons de cette relation est celle de HEISENBERG [106]. Une justification intuitive est due à VAN DE HULST [104], qui fait usage des lois de l'optique. Une démonstration générale est donnée par LAX [107].

La relation analogue pour la section efficace de transmission d'une ouverture est démontrée par LEVINE et SCHWINGER [83] et, dans le cas électromagnétique, par l'auteur de R_2 [79].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. TORALDO DI FRANCIA: *Rev. d'Opt.*, **28**, 597 (1949). — [2] W. E. KOCK: *Proc. I.R.E.*, **34**, 828 (1946); *Bell. S.T.J.*, **27**, 58 (1948). — [3] N. CARRARA, P. CHECCUCCI et M. SCHAFFNER: *Alta Frequenza*, **17**, 243 (1948). — [4] G. TORALDO DI FRANCIA: *Journ. Opt. Soc. Am.*, **39**, 324 (1949); *Proc. Phys. Soc.*, B **62**, 461 (1949). — [5] L. BERGMANN: *Der Ultraschall* (Zürich, 1949). — [6] R. POHLMAN: *Zeits. Phys.*, **113**, 697 (1939). — [7] W. E. KOCK et F. K. HARVEY: *Journ. Acoust. Soc. Am.*, **21**, 471 (1949). — [8] S. YA. SOKOLOV: *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **64**, 333 (1949). — [9] J. A. PRINS: *Naturwiss.*, **19**, 435 (1931). — [10] J. DYSON: *Proc. Roy. Soc.*, **199**, 130 (1949). — [11] G. TORALDO DI FRANCIA: *Rend. Acc. Naz. Linc.*, **4**, 730 (1948). — [12] F. ZERNIKE: *Rev. d'Opt.*, **27**, 713 (1948); *Proc. Phys. Soc.*, **60**, 158 (1948). — [13] A. MARÉCHAL et F. NAUDIN: *Compt. Rend.*, **230**, 1515 (1950). — [14] H. MAECKER: *Ann. der Phys.*, **4**, 409 (1949). — [15] H. OTT: *Ann. der Phys.*, **4**, 432 (1949). — [16] W. HARTNAGEL et E. KAPPLER: *Zeits. Naturforsch.*, **4 a**, 498 (1949). — [17] C. W. HORTON et R. B. WATSON: *Journ. Appl. Phys.*, **21**, 16 (1950). — [18] C. L. ANDREWS: *Phys. Rev.*, **71**, 777 (1947); **74**, 1231 (1948); **75**, 346 (1949). — [19] W. OWEN TRAUTER: *Phys. Rev.*, **73**, 184 (1948). — [20] H. SEVERIN: *Zeits. Naturforsch.*, **1**, 487 (1946). — [21] R. HONERJAGER: *Ann. der Phys.*, **4**, 25 (1948). — [22] LORD RAYLEIGH: *Phil. Mag.*, **14**, 60 (1907). — [23] M. SCHAFFNER et G. TORALDO DI FRANCIA: *Nuovo Cimento*, **6**, 125 (1949). — [24] M. SCHAFFNER: *Alta Frequenza*, **17**, 147 (1948). — [25] J. C. HUBBARD, I. F. ZARTMAN et G. R. LARKIN: *Journ. Opt. Soc. Am.*, **37**, 832 (1947). — [26] F. M. WIENER: *Journ. Acoust. Soc. Am.*, **20**, 367 (1948). — [27] F. CROZE et G. DARMOIS: *Compt. Rend.*, **228**, 824 (1949). — [28] S. A. SCHELKUNOFF: *Bell. S.T.J.*, **15**, 92 (1936). — [29] L. DE BROGLIE: *Problèmes de la propagation guidée des ondes électromagnétiques* (Paris, 1941), p. 96. — [30] W. FRANZ: *Zeits. Naturforsch.*, **3 a**, 500 (1948). — [31] F. CROZE et E. DURAND: *Compt. Rend.*, **228**, 236 (1949). — [32] F. CROZE

- et P. BOILLET: *Compt. Rend.*, **228**, 305 (1949). — [33] S. A. SCHELKUNOFF: *Electromagnetic Waves* (New York, 1943), p. 246. — [34] N. N. MALOV: *Journ. Exp. Théor. Phys. SSSR*, **16**, 495 (1946). — [35] K. ARTMANN: *Zeits. Phys.*, **127**, 468 (1950). — [36] J. P. VASSEUR: *Compt. Rend.*, **226**, 885 (1948). — [37] J. BRODIN: *Compt. Rend.*, **229**, 989 (1949); **229**, 1065 (1949). — [38] L. CAPRIOLI: *Mem. Acc. Sci. Bologna*, **6** (1949). — [39] J. W. MILES: *Phys. Rev.*, **74**, 1531 (1948). — [40] E. DURAND: *Rev. d'Opt.*, **28**, 325 (1949). — [41] F. V. ATKINSON: *Phil. Mag.*, **40**, 645 (1949). — [42] A. N. TICHONOV et A. A. SAMARSKII: *Journ. Exp. Theor. Phys. SSSR*, **18**, 243 (1948). — [43] C. J. BOUWKAMP: *Physica*, **12**, 467 (1946). — [44] R. G. MIRIMANOV: *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **61**, 617 (1948). — [45] J. MEIXNER: *Zeits. Naturforsch.*, **3 a**, 506 (1948). — [46] A. W. MAUE: *Zeits. Phys.*, **126**, 601 (1949). — [47] W. BRAUNBECK: *Ann. der Phys.*, **6**, 53 (1949). — [48] P. M. DUFFIEUX: *Rev. d'Opt.*, **29**, (1950). — [49] P. M. DUFFIEUX et G. TORALDO DI FRANZIA: *Atti Fond. G. Ronchi*, **5**, 1 (1950). — [50] A. RUBINOWICZ: *Ann. der Phys.*, **53**, 257 (1917). — [51] W. KOSSEL: *Zeits. Naturforsch.*, **3 a**, 496 (1948); **4 a**, 506 (1949). — [52] V. RONCHI: *Zeits. Phys.*, **37**, 732 (1926); **55**, 717 (1929); *Nuovo Cimento*, **6**, 378 (1929). — [53] W. BRAUNBECK: *Zeits. Naturforsch.*, **4 a**, 509 (1949). — [54] LORD RAYLEIGH: *Phil. Mag.*, **10**, 73 (1880). — [55] N. WIENER et E. HOFF: *Sitzber. Preuss. Akad.*, 696 (1931). — [56] J. F. CARLSON et A. E. HEINS: *Quart. Appl. Math.*, **4**, 314 (1947); **5**, 82 (1947). — [57] L. A. WAINSTEIN: *Izvestiya Akad. Nauk. SSSR*, **12**, 144 (1948). — [58] J. W. MILES: *Journ. Acoust. Soc. Am.*, **20**, 370 (1948). — [59] H. LEVINE et J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **73**, 383 (1948). — [60] C. J. BOUWKAMP: *Thèse* (Groningen, 1941). — [61] A. STORRUSTE et H. WERGELAND: *Forhand. Kong. Norsk. Vidensk. Selsk.*, **21**, Nr. 10, 11, 21, 22 (1949); *Phys. Rev.*, **73**, 1397 (1948). — [62] R. D. SPENCE: *Journ. Acoust. Soc. Am.*, **20**, 380 (1948). — [63] A. LEITNER: *Journ. Acoust. Soc. Am.*, **21**, 331 (1949). — [64] F. C. WIENER: *Journ. Acoust. Soc. Am.*, **21**, 334 (1949). — [65] H. STENZEL: *Ann. der Phys.*, **4**, 303 (1949). — [66] J. BRILLOUIN: *Compt. Rend.*, **229**, 513 (1949). — [67] C. J. BOUWKAMP: *Math. Rev.*, **11**, 141 (1950). — [68] R. G. MIRIMANOV: *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **67**, 835 (1949); **67**, 1021 (1949). — [69] W. FRANZ: *Zeits. Phys.*, **125**, 563 (1948). — [70] C. J. BOUWKAMP: *Physica*, **16**, 1 (1950). — [71] C. J. BOUWKAMP: *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetens.*, **52**, 987 (1949). — [72] M. A. LEONTOWIČ: *Bull. Akad. Sci. SSSR*, **9**, 16 (1944); *Récherches sur la propagation des ondes radio*, édition Akad. Nauk. SSSR, (1948). — [73] O. I. PANYČ: *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **70**, 589 (1950). — [74] V. A. FOCK: *Journ. Exp. Theor. Phys. SSSR*, **10**, 130 (1946); *Phil. Mag.*, **39**, 149 (1948). — [75] C. W. HORTON: *Phys. Rev.*, **75**, 1263 (1949). — [76] M. BORN: *Optik* (Berlin, 1933), p. 315. — [77] J. W. MILES: *Journ. Math. Phys.*, **28**, 222 (1950). — [78] L. CAPRIOLI: *Rend. Acc. Naz. Linc.*, **7**, 103 (1949). — [79] G. TORALDO DI FRANZIA: *Rend. Acc. Naz. Linc.*, **8**, (1950). — [80] E. T. COPSON: *Proc. Roy. Soc.*, **186**, 100 (1946). — [81] C. J. BOUWKAMP: *Math. Rev.*, **8**, 179 (1947). — [82] J. P. VASSEUR: *Compt. Rend.*, **229**, 179 (1949); **229**, 568 (1949). — [83] H. LEVINE et J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **74**, 958 (1948). — [84] H. LEVINE et J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **75**, 1423 (1949). — [85] J. W. MILES: *Journ. Appl. Phys.*, **20**, 760 (1949). — [86] A. SOMMERFELD: *Ann. der Phys.*, **2**, 85 (1948). — [87] U. FANO: *Journ. Opt. Soc. Am.*, **38**, 921 (1948). — [88] L. ROSENFELD: *Nuclear Forces* (Amsterdam, 1948), p. 78. — [89] L. HULTHEN: *K. Fysiogr. Sällsk. Lund Förhandl.*, **14**, 21 (1944). — [90] R. COURANT et D. HILBERT: *Methoden der Mathematischen Physik*, t. 1 (Berlin, 1924), p. 157. — [91] J. C. BOUWKAMP: *Phys. Rev.*, **75**, 1608 (1949). — [92] H. LEVINE et J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **75**, 1608 (1949). — [93] H. LEVINE: *Journ. Acoust. Soc. Am.*, **22**, 48 (1950). — [94] J. W. MILES: *Journ. Acoust. Soc. Am.*, **21**, 140 (1949); **21**, 434 (1949). — [95] G. V. KISUNKO: *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **66**, 863 (1949). — [96] W. H. WATSON: *Wave Guide Transmission and Antenna Systems* (Oxford, 1947), p. 56. — [97] YA. N. FELD: *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **60**, 1165 (1948).

- [98] M. LEONTOWIČ: *Journ. Exp. Theor. Phys. SSSR*, **16**, 414 (1946). – [99] D. SINCLAIR: *Journ. Opt. Soc. Am.*, **37**, 475 (1947). – [100] H. G. HOUGHTON et W. H. CHALKER: *Journ. Opt. Soc. Am.*, **39**, 955 (1949). – [101] G. JOBST: *Ann. der Phys.*, **76**, 863 (1925). – [102] J. A. STRATTON et H. G. HOUGHTON: *Phys. Rev.*, **38**, 159 (1931). – [103] H. S. W. MASSEY et C. B. D. MOHR: *Proc. Roy. Soc.*, **141**, 443 (1933). – [104] H. C. VAN DE HULST: *Physica*, **15**, 740 (1949). – [105] L. BRILLOUIN: *Journ. Appl. Phys.*, **20**, 1110 (1949). – [106] W. HEISENBERG: *Zeits. Phys.*, **120**, 513 (1943). – [107] M. LAX: *Phys. Rev.*, **78**, 306 (1950).

ERRATA-CORRIGE

S. GIBELLATO: Onde elettromagnetiche ordinarie ed evanescenti prodotte da distribuzioni piane di cariche e di correnti, 7, 606, (1950).

pag. 612 - 15^a riga:

leggasi: $(\sqrt{\varepsilon\mu}/\sqrt{\varepsilon\mu + a_2^2})\lambda$

invece di: $(\sqrt{\varepsilon\mu}/\omega\sqrt{\varepsilon\mu + a_2^2})\lambda$

pag. 617 - 22^a riga:

leggasi $E_x = \frac{\mp \sqrt{1-\beta^2}}{2\varepsilon} \sigma_0 \sin \dots$

invece di: $E_x = \frac{\pm \sqrt{1-\beta^2}}{2\varepsilon} \sigma_0 \sin \dots$

pag. 620 - 23^a riga:

leggasi: $|u| > 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$

invece di: $|u| = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$

pag. 621 - 7^a e 8^a riga:

leggasi $\Gamma = \begin{cases} -i|n|\sqrt{1-(\sqrt{\varepsilon\mu}u)^2} \\ |n|\sqrt{(\sqrt{\varepsilon\mu}u)^2 - 1} \end{cases}$

invece di: $\Gamma = \begin{cases} -in\sqrt{1-(\sqrt{\varepsilon\mu}u)^2} \\ n\sqrt{(\sqrt{\varepsilon\mu}u)^2 - 1} \end{cases}$

pag. 621 - 12^a riga:

leggasi: $j_y = j_0 \exp [inu(t - x/u)]$

invece di: $j_y = j_0 \exp [nu(t - x/u)]$

pag. 623 - 12^a riga:

leggasi: indicando con $\sqrt{\vartheta^2 + n^2}$ la radice di $(\vartheta^2 + n^2) \dots$

invece di: indicando con $\sqrt{\vartheta^2 - n^2}$ la radice di $(\vartheta^2 - n^2) \dots$

pag. 625 - 2^a e 3^a riga:

leggasi: combinazioni lineari di $(-r/\sqrt{\varepsilon\mu})E_0$, $\sqrt{\mu/\varepsilon}H_0$, $(p/\sqrt{\varepsilon\mu})E_0$,
 $(-r/\sqrt{\varepsilon\mu})H_0$, $-\sqrt{\varepsilon/\mu}E_0$, $(p/\sqrt{\varepsilon\mu})H_0$.

invece di: combinazioni lineari di $-r/\sqrt{\varepsilon\mu}E_0$, $\sqrt{\mu/\varepsilon}H_0$, $p/\sqrt{\varepsilon\mu}E_0$,
 $-r/\sqrt{\varepsilon\mu}H_0$, $-\sqrt{\varepsilon/\mu}E_0$, $p/\sqrt{\varepsilon\mu}H_0$.

